

LABORATOIRE DE PHYSIQUE
DE L'ÉCOLE NORMALE
SUPÉRIEURE



THESE

PRESENTÉE A LA FACULTE DES SCIENCES

de PARIS

pour obtenir le grade de Docteur ès-Sciences Physiques

par

Daniel CALECKI

Sujet de la Thèse : Contribution à l'étude des phénomènes galvanomagnétiques
non-linéaires.

Soutenue le 12 février 1970 devant la Commission d'Examen :

MM. AIGRAIN P.
YVON J.
TAVERNIER J.
ARGYRES P.N.

1970_01

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES PHYSIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

par

Daniel CALECKI

pour obtenir

le grade de Docteur ès-Sciences

Sujet de la Thèse : Contribution à l'étude des phénomènes galvanomagnétiques non-linéaires.

Soutenue le février 1970 devant la Commission d'Examen :

MM. AIGRAIN P.
YVON J.
TAVERNIER J.
ARGYRES P.N.



Nous avons commencé ce travail en tant qu'ingénieur au Laboratoire Central des Industries Electriques. Nous tenons à remercier le Directeur de ce Laboratoire, le Professeur Ph. Olmer, de nous y avoir accueilli et de nous avoir intégré au sein de l'équipe dirigée par le Professeur J. Tavernier. Nous avons achevé notre thèse après que nous soyons passé dans l'Enseignement Supérieur et que notre équipe ait rejoint le Groupe de Physique des Solides de l'Ecole Normale Supérieure. Nous exprimons notre profonde reconnaissance au Professeur J. Bok qui nous a encouragé à poursuivre nos recherches.

Nous remercions chaleureusement l'ensemble des chercheurs qui nous ont aidé à divers titres et plus particulièrement le Professeur J. Tavernier avec lequel nous avons eu des discussions essentielles. Citons aussi notre ami, I. Rosenman, dont le soutien nous a été infiniment précieux. Nous avons particulièrement apprécié la collaboration technique de Monsieur J.C. Antoine, Mademoiselle R.M. Meunier et de Monsieur R. Leleu.

Nous sommes reconnaissant à Messieurs les Professeurs P. Aigrain, J. Yvon, J. Tavernier et P.N. Argyres d'avoir accepté de faire partie de notre Jury de Thèse.

Enfin, nous n'oublions pas Madame Mollot et Mademoiselle Fayt qui ont rempli la tâche ingrate de taper ce texte.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550221_0005

TABLE DES MATIERES

	PAGES
CHAPITRE 1.- INTRODUCTION.	1
CHAPITRE 2.- THEORIE QUANTIQUE DES PHENOMENES NON LINEAIRES EN CHAMPS ELECTRIQUE ET MAGNETIQUE CROISES. I - PREMIERE METHODE.	8
I - Résultats préliminaires.	8
II - Opérateur densité et phénomènes non linéaires.	10
III - Composantes transversales du vecteur densité de courant électrique.	11
CHAPITRE 3.- THEORIE QUANTIQUE DES PHENOMENES NON LINEAIRES EN CHAMPS ELECTRIQUE ET MAGNETIQUE CROISES. II - SECONDE METHODE.	18
I - Conditions initiales et considérations énergétiques.	18
II - Opérateur densité hors d'équilibre.	20
III - Calcul de $\langle \vec{J}_x \rangle$.	21
IV - Calcul de $\langle P \rangle$.	28
V - Conclusion.	32
CHAPITRE 4.- LES DEVIATIONS PAR RAPPORT A LA LOI D'OHM. I - LIMITE CLASSIQUE.	34
I - Expression générale de $\langle J_x \rangle$ en limite classique ($\hbar\omega_c \ll kT$).	35
II - Calcul de $\langle J_x \rangle$ dans le cas de l'interaction électrons-phonons acoustiques.	38
III - Détermination de la température électronique dans le cas de l'interaction électrons-phonons acoustiques. Expression finale de $\langle J_x \rangle$ dans la seconde théorie.	42
IV - Calcul de $\langle J_x \rangle$ dans le cas de l'interaction électrons-phonons optiques.	45
V - Détermination de la température électronique dans le cas de l'interaction électrons-phonons optiques. Expression finale de $\langle J_x \rangle$ dans la seconde théorie.	48

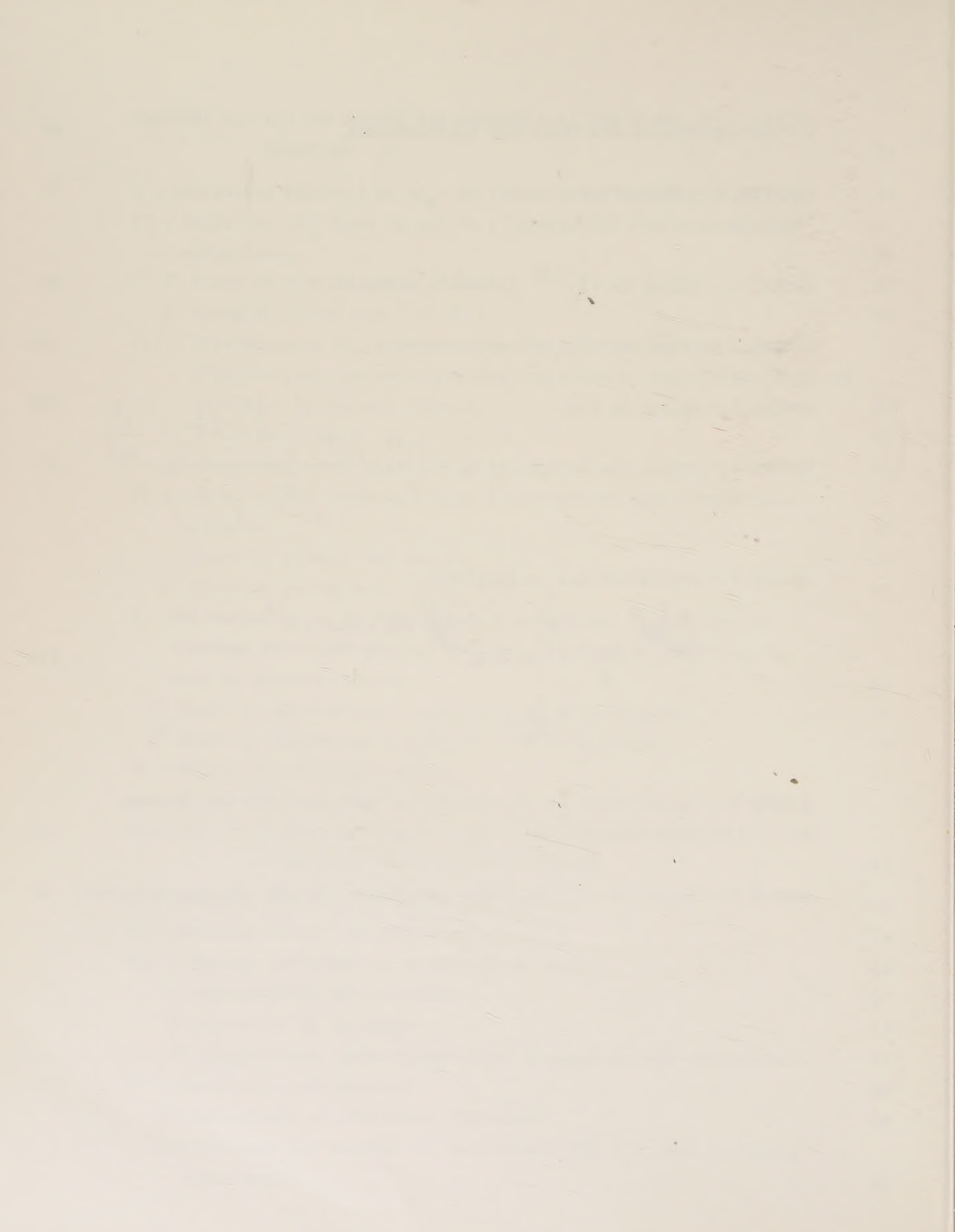
CHAPITRE 5.- LES DEVIATIONS PAR RAPPORT A LA LOI D'OHM. II - LIMITE

QUANTIQUE.	51
I - Expression générale de $\langle J_x \rangle$ en limite quantique ($\hbar\omega_c \gg kT$).	51
II - Calcul de $\langle J_x \rangle$ dans le cas de l'interaction électrons-phonons acoustiques.	54
1° Etude du premier cas : $a^2 \gg 1$.	55
2° Etude du second cas : $a^2 \ll 1$.	58
III - Détermination de la température électronique dans le cas de l'interaction électrons-phonons acoustiques. Expression finale de $\langle J_x \rangle$ dans la seconde théorie.	60
1° Etude du premier cas : $a^2 \gg 1$.	60
2° Etude du second cas : $a^2 \ll 1$.	61
IV - Calcul de $\langle J_x \rangle$ dans le cas de l'interaction électrons-phonons optiques.	62
1° Etude du premier cas : $\omega_q/\omega_c \gg 1$.	64
2° Etude du second cas : $\omega_q/\omega_c \ll 1$.	65
V - Détermination de la température électronique dans le cas du couplage électrons-phonons optiques. Expression finale de $\langle J_x \rangle$ dans la seconde théorie.	67
1° Etude du premier cas : $\omega_q/\omega_c \gg 1$ (T et B faibles).	67
2° Etude du second cas : $\omega_q/\omega_c \ll 1$ (T et B élevés).	70
VI - Résumé des résultats acquis.	71

CHAPITRE 6.- ETUDE EXPERIMENTALE DES DEVIATIONS PAR RAPPORT A LA LOI D'OHM DANS L'ANTIMONIURE D'INDIUM.

I - Schéma de principe du montage de mesure.	75
II - Relation entre les coefficients r et β .	78
III - Montage expérimental et méthode de mesure.	80
a) Appareillage électronique.	80
b) Linéarité de la chaîne.	83
c) Echantillons, porte-échantillon et appareillage environnant.	84
IV - Résultats expérimentaux.	86
a) Généralités et phénomènes linéaires.	86
b) Résultats des mesures du coefficient $r(B, T_0)$ dans la limite classique.	88

V - Interprétation des résultats expérimentaux.	89
CHAPITRE 7.- CONCLUSION.	95
ANNEXE 1.- Calcul de $\langle \vec{J}_x \rangle^{(3)}$ (première théorie).	98
ANNEXE 2.- Calcul de $\langle \vec{J}_x \rangle$ (seconde théorie).	104
ANNEXE 3.- Calcul de $S(\vec{q})$.	107
ANNEXE 4.- Calcul des intégrales $L_{\pm}^r = \int_0^{\theta/T} dt \, t^r \frac{e^{\frac{1}{2} \pm \frac{t}{T_0}} - e^{\frac{1}{2} - \frac{t}{T_0}}}{e^{\frac{t}{T_0}} - 1}$	111
ANNEXE 5.- Evaluation des intégrales :	
$\int_0^{\frac{\hbar q_{\max}^2}{2m\omega_q}} \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_{-\frac{V_0}{V_T}}^{\frac{V_0}{V_T}} du \, u \, e^{-\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left(\sqrt{x} \pm \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \pm u\right)^2}$	113
ANNEXE 6.- Calcul final de $\langle J_x \rangle$ en limite quantique. Cas des phonons acoustiques.	115
ANNEXE 7.- Calcul de $\langle J_x \rangle$ en limite quantique. Cas des phonons optiques.	127



CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Le formalisme de l'opérateur densité appliqué depuis un peu plus d'une dizaine d'années par Kubo⁽¹⁾ et ses émules à l'étude des phénomènes hors d'équilibre a surtout été exploité pour expliquer les phénomènes "linéaires": c'est à dire les faibles déviations par rapport à l'équilibre thermodynamique traitées linéairement en fonction de la grandeur physique créant le déséquilibre. Nous avons été tenté d'étendre les calculs de Kubo aux phénomènes non linéaires et d'étudier plus précisément ceux intervenant immédiatement après le domaine linéaire. Notre travail concerne une petite partie des phénomènes de transport hors d'équilibre, celle des effets galvanomagnétiques isothermes. De plus, pour des commodités de calcul qui apparaîtront bientôt, nous avons choisi d'explorer les faibles déviations par rapport à loi d'Ohm dans des cristaux soumis à de fortes inductions magnétiques ; nous qualifierons le phénomène étudié d'"électrons tièdes".

Une première manière d'aborder ce problème consiste à supposer que l'on applique lentement -"adiabatiquement"- un champ électrique à un cristal et à calculer le courant électrique en régime stationnaire. On admet qu'avant l'application du champ électrique, les électrons, en interaction avec les phonons, sont en équilibre thermodynamique et sont soumis à l'action d'une induction magnétique $\vec{B}$. De plus l'intensité du champ électrique $\vec{E}$ est juste suffisante pour faire apparaître une déviation par rapport à la loi d'Ohm. Il faut remarquer dès maintenant que l'introduction d'une induction magnétique simplifie considérablement le calcul de certains coefficients du tenseur de conductivité électrique.

En effet, il est bien connu que quand $\vec{E}$ est dirigé suivant ox et $\vec{B}$ suivant oz , les électrons, s'ils sont libres c'est à dire sans interaction avec les phonons, acquièrent une vitesse moyenne $\vec{V}_0$ dirigée suivant le 3ème axe oy et telle que

$$\vec{V}_0 = (0, -E/B, 0)$$

quelles que soient les intensités de $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Autrement dit, les composantes σ_{xx} et $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$ du tenseur de conductivité électrique sont respectivement nulle et indépendante de E .

Supposons maintenant que l'interaction électrons-phonons ne soit plus négligée. On s'attend à ce que la vitesse moyenne des électrons ait une composante suivant la direction ox du champ électrique et qu'elle ne dépende plus linéairement de l'intensité de $\vec{E}$ en dehors de la région ohmique. La composante suivant oy est, a priori, elle aussi modifiée.

Cette remarque concernant l'influence de l'interaction électrons-phonons sur σ_{xx} et σ_{xy} suggère d'effectuer, dans le cas où l'interaction en question est suffisamment faible, un traitement de perturbation limité à l'ordre le plus bas et par conséquent relativement économique du point de vue des développements de calculs.

Nous montrons dans le chapitre 2 que, quand on limite les calculs à l'ordre deux par rapport à l'intensité du couplage électrons-phonons, la composante $\langle V_x \rangle$ de la vitesse moyenne $\langle \vec{V} \rangle$ prend une valeur finie non nulle, tandis que la composante $\langle V_y \rangle$ conserve la valeur $-E/B$. Plus précisément, en suivant les grandes lignes de la théorie de Kubo, nous calculons le coefficient β caractérisant les faibles déviations par rapport à loi d'Ohm et intervenant dans le coefficient σ_{xx} qui prend la forme

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{(0)} (1 + \beta E^2)$$

Le coefficient $\sigma_{xx}^{(0)}$ est la conductivité électrique ohmique. (Le vecteur densité de courant devant être une fonction impaire de $\vec{E}$, il ne peut figurer de terme impair en E dans σ_{xx}).

En suivant l'ordre chronologique de nos travaux -qui n'est pas toujours l'ordre adopté dans la suite de cet exposé- nous avons, à partir de cette expression générale de β obtenue en théorie quantique, analysé dans un cas limite les variations de β avec la température T_0 du cristal et avec l'induction magnétique. Nous avons choisi d'étudier la région dite classique des fortes inductions magnétiques définies par les conditions $\hbar\omega_c \ll kT_0$, $\omega_c \tau \gg 1$ (ω_c : pulsation cyclotron ; τ : temps de relaxation de la vitesse moyenne électronique) et nous avons considéré les deux types d'interaction suivants : électrons-phonons acoustiques et électrons-phonons optiques. Nous avons trouvé un certain nombre de résultats consignés dans les tableaux

de la fin du chapitre 5, et que l'on peut résumer ainsi : β varie en B^{-2} pour les deux types de phonons ; il décroît comme T_0^{-1} pour les phonons acoustiques et, pour les phonons optiques, il s'annule en changeant de signe quand la température passe par une certaine valeur T_a ne dépendant que de l'énergie des phonons optiques. En comparant nos résultats avec ceux obtenus par d'autres méthodes⁽²⁾ dans le cas des phonons acoustiques, nous constatons un accord du point de vue de la dépendance en B , mais un désaccord sur les variations avec la température. Or, aucune expérience n'ayant été effectuée, à notre connaissance, sur les variations de β avec T_0 dans la région classique, il était délicat de conclure.

Nous avons donc interrompu nos recherches théoriques et entrepris une étude expérimentale des variations de β avec T_0 et B dans la région classique des inductions magnétiques élevées. Nous avons choisi de mesurer le coefficient β dans un semiconducteur bien connu - l'Antimoniure d'Indium : InSb - pour lequel les conditions $\hbar\omega_c \ll kT_0$, $\omega_c \tau \gg 1$ se trouvent aisément remplies dans la gamme des températures comprises entre 77 et 300°K, avec des inductions magnétiques facilement produites par des électro-aimants. De plus, nous savons que dans InSb pur de type n les phonons optiques et les phonons acoustiques sont couplés avec les électrons dans tout l'intervalle de température choisi.

Nous exposons en détail au chapitre 6 la technique expérimentale et les résultats de nos mesures. De nombreuses difficultés ont immédiatement surgi provenant de la petitesse des effets à mesurer souvent masqués ou perturbés par les défauts - de natures difficiles à préciser avec certitude - de nos échantillons. Pour atteindre directement le coefficient β il aurait fallu utiliser des échantillons de InSb possédant la géométrie de Corbino. Devant les inconvénients d'une telle méthode, nous avons préféré opérer avec la géométrie allongée et mesurer β indirectement. Le montage que nous avons réalisé repose sur une technique de comparaison entre une résistance fixe et la résistance de notre échantillon sensible à l'intensité du champ électrique appliqué. Comme dans la majorité des études d'électrons chauds, nous avons utilisé des techniques d'impulsions rectangulaires, mais, dans notre cas, l'"horizontalité" du plateau des impulsions est un élément

essentiel permettant d'effectuer les mesures. Grâce à un système de conversion des signaux pulsés en d.d.p. continues, la sensibilité de notre montage était tel que des variations de résistance de quelques 10^{-5} pouvaient être mesurées.

Nous avons ainsi exploré les valeurs de β dans des échantillons de InSb de type n (concentration électronique : $n \approx 10^{20} \text{ m}^{-3}$; mobilité à 77°K : $\mu \approx 50 \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$) entre des températures allant de 77 à 210°K et pour des inductions magnétiques allant jusqu'à $1,2 \text{ Wb/m}^2$. Pour un même échantillon, les expériences s'étalant sur plusieurs semaines, nous avons pu constater la reproductibilité complète, du point de vue quantitatif, de nos résultats. Par contre les résultats varient d'un échantillon à l'autre tout en conservant tous les caractères qualitatifs.

Les mesures de β nous ont montré qu'il variait avec l'induction magnétique suivant une loi en $B^{-n(T_0)}$ où l'exposant n différait de 2 et dépendait de la température. De plus, la dépendance de β avec T_0 présentait bien une annulation de β pour une température T_a , mais il était impossible de l'interpréter dans le cadre de notre théorie car le changement de signe de β à son passage par T_a était dans un sens contraire à celui prévu par la théorie.

Nous avons donc repris l'étude théorique sur de nouvelles bases. Dans notre première théorie, nous considérions initialement un gaz d'électrons interagissant avec un gaz de phonons et formant à eux deux un système isolé en équilibre thermodynamique à la température T_0 ; puis nous appliquions "adiabatiquement" un champ électrique et nous calculions le courant électrique qui apparaît en régime stationnaire, en nous limitant à l'ordre deux par rapport à l'intensité du couplage électrons-phonons et à l'ordre trois par rapport à l'intensité du champ électrique.

Nous supposons dans notre seconde théorie exposée au chapitre 3 que, dans l'état initial, le système étudié est constitué par un gaz d'électrons soumis à l'action des champs électriques et magnétiques croisés et par un gaz de phonons dont l'interaction avec les électrons, sans être rigoureusement nulle, est négligée. Du fait de cette approximation, les électrons possèdent une vitesse moyenne perpendiculaire à la fois à $\vec{E}$ et $\vec{B}$ et ne reçoivent pas d'énergie de la part du champ électrique ; de plus les électrons n'échangent pas d'énergie avec les phonons. Les deux gaz sont donc isolés et en équilibre

chacun de leur côté. L'opérateur densité décrivant le système total dans son état initial est par conséquent factorisé et de la forme :

$$\rho_o = \rho_o^{(e)} \rho_o^{(p)} \quad (1)$$

L'opérateur $\rho_o^{(p)}$ associé aux phonons en équilibre thermodynamique à la température T_o s'écrit :

$$\rho_o^{(p)} = \frac{e^{-H_p/kT_o}}{\text{Tr exp} - \frac{H_p}{kT_o}} \quad (2)$$

L'opérateur $\rho_o^{(e)}$ associé aux électrons est diagonal dans la base des vecteurs propres de l'hamiltonien $\hat{H}_e$ du gaz d'électrons soumis à $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Nous serons conduit à admettre que ses éléments diagonaux s'écrivent :

$$\langle e | \rho_o^{(e)} | e \rangle \sim e^{-E_e/kT} \quad (3)$$

L'énergie E_e a pour expression celle du gaz d'électrons dans l'état $|e\rangle$ où l'on a fait le champ électrique $E = 0$; le paramètre T est appelé température électronique et dépend, a priori, de l'intensité du champ électrique.

Perturbons cet état initial en introduisant une faible interaction entre les électrons et les phonons. Il apparait une composante du vecteur densité de courant électrique dans la direction du champ électrique : $\langle J_x \rangle$. Le gaz d'électrons reçoit donc de la part du champ électrique une énergie qui, par unité de temps, vaut $\langle J_x \rangle E$. De même les phonons, du fait de leur interaction non négligeable avec les électrons reçoivent de ces derniers une énergie égale à $\langle P \rangle$ par unité de temps. En régime permanent, ces deux énergies doivent s'équilibrer et par conséquent on doit avoir :

$$\langle J_x \rangle E = \langle P \rangle \quad (4)$$

Il est possible de calculer séparément $\langle J_x \rangle$ et $\langle P \rangle$ par un traitement de perturbation limité à l'ordre le plus bas par rapport au paramètre sans dimension λ rendant compte de l'intensité de l'interaction électrons-phonons. Il s'avère que $\langle J_x \rangle$ et $\langle P \rangle$ sont tous deux proportionnels à λ^2 . Dans ces conditions l'égalité (4) est indépendante de λ et ne dépend que de la forme (et non pas de l'intensité) de l'interaction électrons-phonons. Comme $\langle J_x \rangle$ et $\langle P \rangle$ dépendent évidemment de T_o et T , elle relie ces deux températures entre elles ; cette relation entre T_o et T est indépendante de λ , quel que soit $\lambda \rightarrow 0$.

Grâce au fait que, dans le système que nous étudions, dès qu'il apparaît un couplage électrons-phonons et quelle que soit la faiblesse de son intensité, il existe une relation entre T_0 et T indépendante de λ , nous pouvons schématiser notre seconde théorie de la façon suivante. Dans un état initial les électrons et les phonons interagissent si peu que leur répartition est approximativement donnée par les équations (1), (2) et (3) ; les températures T_0 et T intervenant dans (2) et (3) ne sont pas indépendantes car l'interaction n'est pas rigoureusement nulle ; une relation déduite de (4) permet d'exprimer T en fonction de T_0 et E . A partir de cet état initial nous introduisons une interaction non négligeable entre électrons et phonons ; nous calculons le courant $\langle J_x \rangle$ qui dépendra de T_0 , T et E . En exprimant T à l'aide de T_0 et E , nous obtiendrons $\langle J_x \rangle$ en fonction de T_0 et E . En extrayant de $\langle J_x \rangle$ le terme d'ordre trois en E , nous obtenons finalement le coefficient β de la seconde théorie.

A la fin des calculs nous constaterons que d'une part, quand on fait $T_0 = T$ dans les résultats de cette seconde théorie, nous retombons sur les résultats de la première. Or, d'après ce qui précède, poser $T = T_0$ c'est ne pas tenir compte des échanges énergétiques ; effectivement ce problème sur les énergies n'est pas apparu au cours du premier calcul. D'autre part, le calcul explicité du coefficient β dans la région classique ($\omega_c \tau \gg 1$, $\hbar \omega_c \ll kT_0$) quand les électrons interagissent avec les phonons acoustiques donne des résultats déjà obtenus par d'autres chercheurs⁽²⁾ à partir de méthodes différentes.

Encouragé par ce dernier résultat positif nous avons entrepris dans les chapitres 4 et 5 de dresser un tableau des valeurs de β , en limite classique et en limite quantique, correspondant à divers types d'interactions : interaction avec les phonons acoustiques par l'intermédiaire du potentiel de déformation et du couplage piézoélectrique ; interaction avec les phonons optiques.

A l'aide de ces nouveaux calculs, nous avons repris l'interprétation de nos résultats expérimentaux. Nous montrons au chapitre 6 qu'il est possible d'interpréter semi-quantitativement les variations expérimentales de β avec la température. Cependant il n'en sera pas de même pour les variations avec l'induction magnétique. Ce dernier point n'est pas catastrophique car il est bien connu que, dans l'Antimoniure d'Indium,

la dépendance avec B de la magnéto-résistance dans le domaine Ohmique n'a pas encore reçu d'explication quand les conditions $\hbar\omega_c \ll kT_0$ et $\omega_c\tau \gg 1$ sont remplies.

Il semble donc que l'extension, que nous avons faite, de la théorie de Kubo aux phénomènes non-linéaires ne permette pas d'interpréter nos résultats expérimentaux ; ceci provient du fait que les échanges d'énergie champ électrique $\rightarrow$ électrons $\leftrightarrow$ phonons ne sont pas correctement pris en compte dans nos calculs. La seconde théorie a le triple mérite de retrouver certains résultats publiés, de traiter de nouveaux types d'interaction électrons-phonons et de contribuer à interpréter partiellement nos résultats expérimentaux.

CHAPITRE 2

THEORIE QUANTIQUE DES PHENOMENES NON LINEAIRES EN CHAMPS ELECTRIQUE ET MAGNETIQUE CROISES. I-PREMIERE METHODE⁽³⁾

I - RESULTATS PRELIMINAIRES

Nous exposons dans ce paragraphe quelques idées valables aussi bien pour ce chapitre que pour le suivant.

Les calculs de perturbation que nous développons dans la suite reposent sur des résultats simples que nous allons tout d'abord établir. Nous désirons obtenir, dans le cadre de la théorie quantique, les composantes du tenseur de conductivité électrique d'un gaz d'électrons soumis à l'action d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'une induction magnétique $\vec{B}$ perpendiculaires ; les électrons n'interagissent pas entre eux ; ils sont simplement, à l'instant initial, en contact avec un thermostat qui leur impose sa température T_0 .

Quand $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont respectivement parallèles à ox et oz , l'hamiltonien $\tilde{h}_e$ d'un électron s'écrit :

$$\tilde{h}_e = \frac{1}{2m} [p_x^2 + (p_y + eBx)^2 + p_z^2] + eEx \quad (1)$$

(la charge de l'électron vaut $-e$ avec $e > 0$). Les fonctions propres et les valeurs propres de $\tilde{h}_e$ sont connues :

$$\tilde{h}_e \psi_{n,k_y,k_z}(\vec{r}) = \epsilon_{n,k_y,k_z} \psi_{n,k_y,k_z}(\vec{r}) \quad (2)$$

$$\epsilon_{n,k_y,k_z} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + e E X_{k_y} + \frac{1}{2} m \left(\frac{E}{B}\right)^2 \quad (3)$$

$$X_{k_y} = -\left(\frac{\hbar k_y}{m \omega_c} + \frac{eE}{m \omega_c^2}\right) \quad (4)$$

$$\psi_{n,k_y,k_z}(\vec{r}) = e^{i(k_y y + k_z z)} \phi_n(x - X_{k_y}) \quad (5)$$

(les fonctions $\phi_n(x)$ sont les fonctions propres d'un hamiltonien d'oscillateur harmonique à une dimension de pulsation ω_c) les fonctions d'onde ψ_{n,k_y,k_z} sont normalisées dans un cristal cubique d'arête unité).

On en déduit les éléments de matrice de l'opérateur vitesse d'un électro

$$\vec{\tilde{V}} = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{h}_e, \vec{r}] \quad (6)$$

En désignant par $|n,k\rangle$ les kets propres de $\tilde{h}_e$ dans lesquels k représente les deux nombres quantiques k_y et k_z , nous obtenons :

$$\langle n,k | \tilde{V}_x | n',k' \rangle = i \left(\frac{\hbar\omega_c}{2m} \right)^{1/2} \left[n^{1/2} \delta_{n',n-1} - (n+1)^{1/2} \delta_{n',n+1} \right] \delta_{k,k'} \quad (7a)$$

$$\langle n,k | \tilde{V}_y | n',k' \rangle = - \frac{eE}{m\omega_c} \delta_{n,n'} \delta_{k,k'} + \left(\frac{\hbar\omega_c}{2m} \right)^{1/2} \left[n^{1/2} \delta_{n',n-1} + (n+1)^{1/2} \delta_{n',n+1} \right] \delta_{k,k'}$$

$$\langle n,k | \tilde{V}_z | n',k' \rangle = \frac{\hbar k_z}{m} \delta_{n,n'} \delta_{k,k'} \quad (7c)$$

Du point de vue statistique, l'opérateur densité $\tilde{\rho}$ décrivant la répartition des électrons dans les états $|n,k\rangle$ est diagonal dans la base des kets propres de $\tilde{h}_e$ et ses éléments de matrice ne dépendent que des énergies $\tilde{\epsilon}_{n,k}$. Dans ces conditions, il est évident que :

$$\langle V_x \rangle = \text{Tr } \tilde{\rho} \tilde{V}_x = 0 \quad (8a)$$

$$\langle V_y \rangle = \text{Tr } \tilde{\rho} \tilde{V}_y = - \text{Tr } \frac{eE}{m\omega_c} \tilde{\rho} = - \frac{E}{B} \quad (8b)$$

$$\langle V_z \rangle = \text{Tr } \tilde{\rho} \tilde{V}_z = 0 \quad (8c)$$

Le résultat (8b) découle du fait que $\text{Tr } \tilde{\rho} = 1$, tandis que (8c) provient de ce que $\tilde{\rho}$, étant fonction de $\tilde{\epsilon}_{n,k}$, est une fonction paire de k_z .

Remarquons que pour aboutir aux équations (8), nous n'avons utilisé que deux propriétés de $\tilde{\rho}$: 1° $\tilde{\rho}$ est normalisé et 2° $\tilde{\rho}$ n'est fonction que de $\tilde{h}_e$. Notons aussi que nous avons implicitement supposé que les électrons n'échangent d'énergie qu'avec le thermostat ; c'est effectivement ce qui se passe puisque $\langle \vec{V} \rangle$ étant perpendiculaire à $\vec{E}$ et $\vec{B}$, les électrons ne reçoivent aucune énergie du champ électrique ou de l'induction magnétique.

Conclusions : Nous venons d'établir que, quelles que soient les intensités du champ électrique et de l'induction magnétique, le vecteur densité de courant électrique $\vec{J} = ne \langle \vec{V} \rangle$ est dirigé suivant oy et que les éléments du tenseur de conductivité se déduisent de :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{xy} = -\frac{ne}{B}$$

Ces résultats sont valables si les électrons n'interagissent qu'avec un thermostat.

Par conséquent, si l'on introduit une faible perturbation -par exemple une interaction électrons-phonons- dont l'intensité est proportionnelle au paramètre sans dimension λ , on peut chercher des expressions de σ_{xx} et de σ_{xy} sous la forme d'un développement en puissance de λ :

$$\sigma_{xx} = a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots \quad \sigma_{xy} = -\frac{ne}{B} + b_1 \lambda + b_2 \lambda^2 + \dots$$

Nous allons entamer maintenant l'exposé d'une première méthode de calcul des coefficients a_i et b_i qui utilisera à un certain stade des développements les résultats qui précèdent mais dont le point de départ apparaîtra éloigné de ces préliminaires.

II - OPERATEUR DENSITE ET PHENOMENES NON-LINEAIRES

Soit, dans un cristal placé dans une induction magnétique uniforme, un gaz de N électrons de masse effective m et dont les interactions inter-électroniques sont négligées. Les électrons interagissent avec le gaz de phonons ; les deux gaz forment initialement un système isolé en équilibre thermodynamique à la température T_0 ; seuls les électrons sont sensibles à l'action de l'induction magnétique $\vec{B} (0,0,B)$ dont la direction est choisie comme axe oz.

Examinons en premier les données de la mécanique quantique

L'hamiltonien du système électrons + phonons s'écrit, à l'aide de notations évidentes :

$$H = H_e + H_p + \lambda H_{ep} \quad (11)$$

$$\text{avec } H_e = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} (p_i + eBx_i)^2 = \sum_{i=1}^N h_e(i) \quad (12)$$

Les calculs de ce chapitre se feront en utilisant le formalisme de la seconde quantification et en prenant pour base les états propres de l'opérateur $H_e + H_p$; dans ces conditions l'hamiltonien H_e des électrons isolés devient :

$$H_e = \sum_v \epsilon_v a_v^+ a_v \quad (13)$$

L'indice v repère les états propres de l'hamiltonien à un électron h_e et remplace les trois nombres quantiques n, k_y, k_z . ϵ_v est l'énergie propre de h_e correspondant au ket $|v\rangle$:

$$\epsilon_v = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \quad (14)$$

L'hamiltonien des phonons isolés s'écrit :

$$H_p = \sum_q \hbar \omega_q \left(b_q^+ b_q + \frac{1}{2} \right) \quad (15)$$

Enfin, l'hamiltonien d'interaction électrons-phonons dans le cas le plus simple d'un couplage isotrope prend la forme :

$$\lambda H_{ep} = \sum_{v,v'} \sum_q \sum_{j=1,2} \gamma_{vv'}(\vec{q}) a_v^+ a_{v'} b_q^j \quad (16)$$

dans laquelle j est un indice ne pouvant prendre que les deux valeurs 1 ou 2 et tel que :

$$b_q^1 = b_q \quad \text{et} \quad b_q^2 = b_{-q}^+ \quad (17)$$

L'élément de matrice $\gamma_{vv'}(\vec{q})$ dépend du type de couplage intervenant entre les électrons et les phonons. De façon générale :

$$\gamma_{vv'}(\vec{q}) = C(\vec{q}) J_{n,k_y;n',k'_y}(\vec{q}_x) \delta_{k_y, q_y + k'_y} \delta_{k_z, q_z + k'_z} \quad (18)$$

avec :

$$J_{n,k_y;n',k'_y}(\vec{q}_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \phi_n \left(x + \frac{\hbar k_y}{m\omega_c} \right) e^{iq_x x} \phi_{n'} \left(x + \frac{\hbar k'_y}{m\omega_c} \right) \quad (19)$$

tandis que $|C(\vec{q})|^2 \propto q^p$ avec $p = 1, -1$ ou -2 pour les différents couplages que nous étudierons en détail dans les chapitres 4 et suivants.

Passons maintenant aux données de la mécanique statistique

Le système électrons + phonons initialement en équilibre thermodynamique à la température T_0 est décrit par l'opérateur densité :

$$\rho_0(H) = \frac{\exp - (H - \xi \hat{N}) / kT_0}{\text{Tr} \exp - (H - \xi \hat{N}) / kT_0} \quad (20)$$

dans lequel ξ est le potentiel chimique et $\hat{N}$ l'opérateur nombre d'électrons :

$$\hat{N} = \sum_v a_v^+ a_v \quad (21)$$

Il est facile de montrer que le courant électrique est, comme il se doit, nul à l'équilibre. Il suffit pour cela de calculer la valeur moyenne

$$\langle J \rangle^{(0)} = \text{Tr} \rho_0 \vec{J} \quad (22)$$

de l'opérateur densité de courant électrique défini par

$$\vec{J} = -e \sum_{i=1}^N \vec{V}_i \quad (23)$$

à partir de l'opérateur vitesse $\vec{V}$ de chaque électron.

Supposons alors qu'à partir de l'instant initial où le système se trouve décrit par ρ_0 , nous appliquons, perpendiculairement à l'induction magnétique, un champ électrique d'intensité lentement croissante. Choisissons l'instant initial à $t = -\infty$ et une loi de variation du champ électrique en fonction du temps de la forme :

$$\vec{E}(t) = \vec{E} e^{st} \quad \text{pour } t < 0 \quad (24a)$$

$$\text{avec } \vec{E} = (E, 0, 0) \quad \text{dirigé suivant } ox \quad (24b)$$

Le paramètre s est positif de façon que $E(t)$ s'annule à $t = -\infty$ et prenne sa valeur maximum à $t = 0$. Nous ferons tendre à la fin des calculs s vers zéro de façon à obtenir la réponse du gaz électronique à l'application d'un champ électrique constant dans le temps.

L'hamiltonien du système électrons + phonons est donc modifié par l'apparition d'un terme d'interaction entre les électrons et le champ électrique :

$$H_F(t) = e \vec{E} \cdot \vec{R} \exp st = e E \chi \exp st \quad (25)$$

L'opérateur $e\vec{R}$ représente la polarisation électronique et $e\chi$ sa projection suivant la direction du champ électrique. L'opérateur χ s'exprime en seconde

quantification sous la forme :

$$\chi = \sum_{\nu, \nu'} x_{\nu, \nu'} a_{\nu}^+ a_{\nu'} \quad (26)$$

dans laquelle $x_{\nu, \nu'}$ est l'élément de matrice de la composante suivant x de l'opérateur position d'un électron.

$$x_{\nu, \nu'} = \frac{\hbar k_y}{m \omega_c} \delta_{k, k'} \delta_{n, n'} + \left(\frac{\hbar}{2m \omega_c} \right)^{1/2} \left[(n+1)^{1/2} \delta_{n', n+1} + n^{1/2} \delta_{n', n-1} \right] \delta_{k, k'} \quad (27)$$

Dès l'application du champ électrique, l'état du système électrons-phonons s'éloigne de l'état d'équilibre thermodynamique. Nous admettons que l'opérateur densité décrivant l'évolution du système satisfait l'équation :

$$i\hbar \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = [H + H_F(t), \rho(t)] \quad (28)$$

Dans l'étude des faibles déviations par rapport à la loi d'Ohm, c'est à dire quand les champs électriques sont relativement peu intenses (nous serons amené plus tard à préciser les ordres de grandeur), nous supposons que le système électrons + phonons s'écarte peu de l'équilibre thermodynamique. Il est alors logique de chercher les solutions de (28) sous la forme d'un développement en série de puissance de E :

$$\rho(t) = \rho_0 + \rho^{(1)}(t) + \rho^{(2)}(t) + \dots \quad (29)$$

dans lequel ρ_0 est l'opérateur dont l'expression est fixée par (20), $\rho^{(1)}(t)$ est un opérateur linéaire par rapport au champ électrique, $\rho^{(2)}(t)$ quadratique, etc... D'un point de vue mathématique, si l'on écrit $\rho(t)$ sous la forme :

$$\rho(t) = \rho_0 + \sum_m \rho^{(m)}(t) \quad (30)$$

il est facile de montrer à partir de (28) que $\rho^{(m)}(t)$ et $\rho^{(m-1)}(t)$ satisfont l'équation :

$$\rho^{(m)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^\infty dt' e^{\frac{H^x}{i\hbar} t'} \left[H_F(t-t'), \rho^{(m-1)}(t-t') \right] \quad (31)$$

Nous avons utilisé dans (31) la notation qui, à tout opérateur A fait correspondre l'opérateur A^x tel que son application à tout opérateur B donne :

$$A^x\{B\} = [A, B] \quad (32)$$

On déduit sans difficulté de cette définition que :

$$e^{A^x}\{B\} = e^A B e^{-A} \quad (33)$$

Dans l'étude des phénomènes d'électrons tièdes, nous n'aurons besoin que de l'expression de $\rho^{(3)}(0)$ qui s'écrit simplement en fonction de ρ_0 :

$$\rho^{(3)}(0) = \left(\frac{eE}{i\hbar}\right)^3 \int_0^\infty dt_1 \int_0^\infty dt_2 \int_0^\infty dt_3 e^{-s(3t_1+2t_2+t_3)} e^{\frac{H^x}{i\hbar} \frac{t_1}{\chi^x}} e^{\frac{H^x}{i\hbar} \frac{t_2}{\chi^x}} e^{\frac{H^x}{i\hbar} \frac{t_3}{\chi^x}} \{\rho_0\} \quad (34)$$

Nous pouvons vérifier au passage que $\text{Tr } \rho^{(m)}(t) = 0$ de façon que $\text{Tr } \rho(t) = \text{Tr } \rho_0 = 1$. Nous n'aurons donc pas à nous préoccuper de la renormalisation de l'opérateur densité dans le calcul des valeurs moyennes intervenant dans la suite :

En résumé, dans ce paragraphe, nous avons admis la validité de l'équation d'évolution de l'opérateur densité pour décrire le système électrons + phonons ; nous avons supposé que l'action du champ électrique E -pour les phénomènes d'électrons tièdes- écartait peu le système de l'équilibre thermodynamique et recherché une solution de l'équation d'évolution sous la forme d'un développement limité aux premières puissances de E.

III - COMPOSANTES TRANSVERSALES DU VECTEUR DENSITE DE COURANT ELECTRIQUE

En désignant par $\vec{J}$ l'opérateur densité de courant électrique et par $\langle \vec{J}(t) \rangle$ sa valeur moyenne à l'instant t, nous savons que :

$$\langle \vec{J}(t) \rangle = \text{Tr } \rho(t) \vec{J} \quad (35)$$

Dans la mesure où $\rho(t)$ est développable suivant les puissances de E à l'aide de (30), $\langle \vec{J}(t) \rangle$ apparaîtra aussi sous la forme d'un développement en

puissances de E ; ce développement ne contiendra que des termes impairs par rapport à $\vec{E}$ du fait du renversement du sens du courant dans un changement de $\vec{E}$ en $-\vec{E}$. En appelant simplement $\langle \vec{J} \rangle$ le vecteur densité de courant à l'instant $t = 0$, nous pouvons donc écrire :

$$\langle \vec{J} \rangle = \langle \vec{J} \rangle^{(1)} + \langle \vec{J} \rangle^{(3)} + \dots \quad (36)$$

$\langle \vec{J} \rangle^{(1)}$ est la composante linéaire de $\langle \vec{J} \rangle$ décrivant les phénomènes ohmiques auxquels nous ne nous intéressons pas. Par contre $\langle \vec{J} \rangle^{(3)}$ qui caractérise les premières déviations par rapport à la loi d'Ohm est l'objet de tous nos calculs. Nous obtiendrons l'expression de $\langle \vec{J} \rangle^{(3)}$ en régime permanent à partir de :

$$\langle \vec{J} \rangle^{(3)} = \lim_{s \rightarrow 0} \text{Tr } \rho^{(3)}(0) \vec{J} \quad (37)$$

Du fait que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires, seules les composantes $\langle J_x \rangle^{(3)}$ et $\langle J_y \rangle^{(3)}$ interviennent. Ces grandeurs sont évidemment réelles ; il s'avère avantageux d'évaluer l'expression complexe

$$\begin{aligned} \langle J_- \rangle^{(3)} &= \langle J_x \rangle^{(3)} - i \langle J_y \rangle^{(3)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \text{Tr } \rho^{(3)}(0) J_- \end{aligned} \quad (38)$$

qui fait intervenir l'opérateur

$$J_- = J_x - i J_y \quad (39)$$

et de séparer en fin de calcul la partie réelle de la partie imaginaire pour obtenir $\langle J_x \rangle^{(3)}$ et $\langle J_y \rangle^{(3)}$. L'expression en seconde quantification de l'opérateur J_- s'écrit :

$$J_- = -2ie \left(\frac{\hbar \omega_c}{m} \right)^{1/2} \sum_v (n+1)^{1/2} a_v^+ a_{v+1} \quad (40)$$

pour un cristal de volume unité*. Notons enfin que nous introduisons aussi l'opérateur

$$J_+ = J_x + i J_y = (J_-)^\dagger \quad (41)$$

Nous sommes maintenant en possession de tous les éléments pour déterminer les déviations par rapport à loi d'Ohm dans un cristal soumis à l'action des champs croisés. De façon générale, on s'attend à trouver pour $\langle J_- \rangle^{(3)}$

*La notation $v+1$ intervenant dans (40) représente les trois indices $n+1, k_y, k_z$.

une expression qui dépende de façon compliquée du paramètre λ caractérisant l'intensité du couplage électrons-phonons. Or, d'après le § II.1, nous savons que si $\lambda=0$, $\langle J_x \rangle^{(3)} = \langle J_y \rangle^{(3)} = 0$. Ce résultat est d'ailleurs facile à vérifier directement à partir des formules (34) et (38) dans lesquelles on fait $H = H_0 = H_e + H_p$. Par conséquent si λ est suffisamment faible, on peut calculer $\langle J_x \rangle^{(3)}$ et $\langle J_y \rangle^{(3)}$ (ou $\langle J_z \rangle^{(3)}$) à l'ordre le plus bas par rapport à λ . Nous allons donc procéder à un traitement de perturbation par rapport à λ sur l'expression (38) de $\langle J_z \rangle^{(3)}$. Nous constaterons rapidement que les termes du premier ordre en λ sont nuls, si bien que seuls les termes du second ordre interviendront.

A quoi correspond physiquement cette hypothèse sur la faiblesse du couplage électrons-phonons ? Nous effectuons un traitement de perturbation à partir d'une situation où, bien que $\vec{E}$ soit dirigé suivant ox , le vecteur densité de courant est dirigé suivant oy grâce à l'existence de $\vec{B}$ dirigé suivant oz . Le couplage électrons-phonons qui fait apparaître une composante non nulle de $\langle \vec{J} \rangle$ suivant ox s'oppose donc à l'action de $\vec{B}$: l'inverse de la fréquence cyclotron ω_c caractérise le temps que met un électron pour décrire une orbite cyclotron, tandis que le temps de relaxation τ de la vitesse électronique moyenne s'interprète comme l'intervalle de temps séparant deux collisions électroniques successives, c.a.d. l'intervalle séparant les instants où les phonons rappellent leur présence aux électrons. Si la condition $\omega_c \tau \gg 1$ est satisfaite, on s'attend donc à ce que les phonons s'opposent peu à l'action de $\vec{B}$ sur les électrons. Or il est bien connu que τ est proportionnel à λ^{-2} . En conséquence on doit s'attendre à ce que le développement de perturbation par rapport à λ ne soit valable que si la condition $\omega_c \tau \gg 1$ est remplie.

Nous abordons maintenant la phase de calcul proprement dite. L'hamiltonien λH_{ep} intervient dans quatre facteurs de la formule (34) donnant $\rho^{(3)}(0)$. Le développement en puissance de λ risque donc de faire intervenir un très grand nombre de termes et la technique de calcul va jouer un rôle essentiel pour obtenir rapidement des résultats simples.

Nous avons reporté dans l'annexe 1 toute cette phase finale importante, mais fastidieuse. Nous en extrayons les deux résultats essentiels concernant les composantes transversales du vecteur densité de courant :

$$\langle J_y \rangle^{(3)} = 0 \quad (42a)$$

$$\begin{aligned} \langle J_x \rangle^{(3)} = & \frac{e^4 E^3}{6} \sum_{v, v'} \sum_q \left(\frac{\hbar q_y}{m \omega_c} \right)^4 \left| N_q f_v^0 (1-f_{v'}^0) - (1+N_q) f_{v'}^0 (1-f_v^0) \right| \\ & \times \frac{2\pi}{\hbar} \left| \gamma_{vv'}(q) \right|^2 \delta^{(3)}(\epsilon_v - \epsilon_{v'} + \hbar \omega_q) \quad (42b) \end{aligned}$$

Les fonctions N_q et f_v sont respectivement les distributions de phonons et d'électrons :

$$N_q = \left(\exp \frac{\hbar \omega_q}{kT_0} - 1 \right)^{-1} \quad \text{et} \quad f_v^0 = \left(\exp \frac{\epsilon_v - \xi}{kT_0} + 1 \right)^{-1} \quad (43)$$

En conclusion, dans des calculs jusqu'à l'ordre trois en champ électrique mais limité à l'ordre deux en λ , le courant de Hall $\langle J_y \rangle$ se réduit à sa partie linéaire en champ électrique et la composante $\langle J_x \rangle^{(3)}$ est donnée par une formule dont la structure est très voisine de celle de la composante $\langle J_x \rangle^{(1)}$ linéaire en $E^{(4)}$.

Nous n'entamerons pas maintenant une discussion de l'expression de $\langle J_x \rangle^{(3)}$ nous réservant de l'entreprendre au chapitre suivant quand nous comparerons les résultats de la seconde théorie avec ceux de la première.

CHAPITRE 3

THEORIE QUANTIQUE DES PHENOMENES NON LINEAIRES EN CHAMPS ELECTRIQUE ET MAGNETIQUE CROISES. II-SECONDE METHODE

I - CONDITIONS INITIALES ET CONSIDERATIONS ENERGETIQUES

Nous reprenons l'étude d'un gaz d'électrons indépendants - en nombre N - soumis à la double action d'un champ électrique $\vec{E}$ ($E, 0, 0$) et d'une induction magnétique $\vec{B}$ ($0, 0, B$) perpendiculaires. Les grandeurs $\vec{B}$ et $\vec{E}$ sont invariables dans le temps et dans l'espace. Ce gaz est susceptible d'interagir avec un gaz de phonons, mais dans un état initial nous supposons que cette interaction est suffisamment faible pour être négligée. D'après ce que nous avons vu au § 2.1, un courant électrique existe, dirigé suivant la direction Oy perpendiculaire à $\vec{E}$ et $\vec{B}$; les électrons ne reçoivent donc aucune énergie de la part du champ électrique.

L'hamiltonien du système total dans son état initial s'écrit :

$$H_0 = \tilde{H}_e + H_p \quad (1)$$

avec :

$$\tilde{H}_e = \sum_{\alpha} \tilde{\epsilon}_{\alpha} a_{\alpha}^{+} a_{\alpha} \quad (2)$$

$$H_p = \sum_q \hbar \omega_q (b_q^{+} b_q + \frac{1}{2}) \quad (3)$$

L'indice α repère les états propres de l'hamiltonien à un électron $\tilde{h}_e$ défini par (2.1) et remplace les trois nombres quantiques n, k_y, k_z . L'énergie $\tilde{\epsilon}_{\alpha}$ est celle d'un électron dans l'état α et est donnée par (2.3). Nous ferons souvent intervenir dans la suite la quantité ϵ_{α} obtenue en faisant $E = 0$ dans $\tilde{\epsilon}_{\alpha}$ et correspondant à l'énergie d'un électron en l'absence de champ électrique.

$$\epsilon_{\alpha} = \tilde{\epsilon}_{\alpha} - eE\tilde{X}_{k_y} - \frac{1}{2} \frac{e^2 E^2}{m \omega_c^2} = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \quad (4)$$

Du point de vue de la mécanique statistique, les deux gaz d'électrons et de phonons étant pratiquement découplés dans l'état initial, l'opérateur densité décrivant le système dans cet état se factorise en un produit de deux opérateurs normalisés de la forme :

$$\rho_0 = \rho_0^{(e)} \rho_0^{(P)} \quad (5)$$

De plus, les électrons sont sans interaction entre eux, et il en est de même pour les phonons. Ceci implique que l'opérateur $\rho_0^{(e)}$ se factorise en un produit d'opérateurs à une particule ; de même pour $\rho_0^{(P)}$. Chacun de ces opérateurs à une particule est diagonal dans la base où nous avons exprimé $\tilde{H}_e$ et H_p en seconde quantification à l'aide des formules (2) et (3). Ces propriétés de factorisation et de diagonalité entraînent que :

$$T_r \rho_0 a_\alpha^+ a_\alpha = F_\alpha \delta_{\alpha,\alpha'} \quad (6a)$$

$$\text{et } T_r \rho_0 b_q^+ b_q = \mathcal{N}_q \delta_{q,q'} \quad (6b)$$

Les fonctions F_α et $\mathcal{N}_q$ représentent les probabilités respectives d'occupation des états α et q par un électron et un phonon dans le cas où l'interaction électrons-phonons est négligée.

Notons au passage que les propriétés de ρ_0 entraînent que les moyennes de produits d'opérateurs du type

$$T_r \rho_0 a_1^+ a_2 a_3^+ \dots b_{q_1} b_{q_2}^+ b_{q_3} \dots$$

se calculent sans difficulté à partir du théorème de Bloch-de Dominicis⁽⁵⁾ sur les contractions.

Nous allons maintenant tenir compte de l'existence d'une interaction électrons-phonons non négligeable mais faible en effectuant un traitement de perturbation à partir de l'état initial. Nous devons donc déterminer le nouvel opérateur densité décrivant les deux gaz en interaction et calculer ensuite les composantes du vecteur densité de courant électrique qui ne soient pas nulles, c.a.d. $\langle J_x \rangle$ et $\langle J_y \rangle$. Cependant, et c'est là une différence importante avec les raisonnements du chapitre 2, nous nous préoccuons ici de considérations énergétiques. En effet, le champ électrique $\vec{E}$ cède de l'énergie aux électrons ; la puissance ainsi reçue est égale à

$\langle \vec{J} \rangle \vec{E} = \langle J_x \rangle E$ par unité de volume. Par ailleurs, les électrons cèdent de l'énergie aux phonons quand le couplage n'est pas nul. Désignons par $\langle P \rangle$ cette puissance par unité de volume. En régime permanent, on s'attend à ce que ces deux puissances prennent la même valeur, soit :

$$\langle J_x \rangle E = \langle P \rangle \quad (7)$$

Les calculs de $\langle J_x \rangle$ et de $\langle P \rangle$ se font indépendamment l'un de l'autre. Par conséquent (7) est une relation qui, si l'on a introduit un paramètre indéterminé dans le calcul de $\langle J_x \rangle$ et $\langle P \rangle$, permet éventuellement de le déterminer. Or nous allons voir qu'effectivement nous introduirons dans nos calculs un tel paramètre et que la relation (7) nous en fournira la valeur.

Les trois paragraphes suivants sont consacrés au calcul de l'opérateur densité hors de l'état initial, au calcul de $\langle \vec{J} \rangle$ et de $\langle P \rangle$.

II - OPERATEUR DENSITE HORS D'EQUILIBRE

A partir de l'instant $t = 0$, nous laissons les électrons libres d'interagir avec les phonons. L'hamiltonien d'interaction est de la forme :

$$\lambda H_{ep} = \sum_{\alpha} \sum_{q} \tilde{\gamma}_{\alpha\alpha'}(q) a_{\alpha}^+ a_{\alpha'} (b_q^+ + b_{-q}) \quad (8)$$

L'élément de matrice $\tilde{\gamma}_{\alpha\alpha'}(q)$ dépend de la nature du couplage. De façon générale :

$$\tilde{\gamma}_{\alpha,\alpha'}(q) = C(q) \tilde{J}_{n,k_y;n',k_y'}(q_x) \delta_{k_y,k_y' + q_y} \delta_{k_z,k_z' + q_z} \quad (9a)$$

$$\text{avec : } \tilde{J}_{n,k_y;n',k_y'}(q_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \phi_n(x - \tilde{x}_{k_y}) e^{i q_x x} \phi_{n'}(x - \tilde{x}_{k_y'}) \quad (9b)$$

où $\tilde{x}_{k_y}$ est donné par (2.4) et $|C(q)|^2 \propto q^p$ avec $p = 1, -1$ ou -2 pour les différents couplages que nous étudierons.

A partir de $t = 0$, l'opérateur densité évolue donc au cours du temps ; il satisfait l'équation :

$$i\hbar \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = (H_e^x + H_p^x + \lambda H_{ep}^x) \rho(t) \quad (10)$$

et la condition initiale :

$$\rho(0) = \rho_0 \quad (11)$$

où ρ_0 est donné par (5) et possède les propriétés évoquées au §3.I. La solution des équations (10) et (11) s'écrit formellement :

$$\rho(t) = e^{\frac{1}{i\hbar} (H_e^x + H_p^x + \lambda H_{ep}^x)t} \{\rho_0\} \quad (12)$$

Dans la mesure où le couplage électrons-phonons est faible, nous pouvons envisager un développement de $\rho(t)$ suivant les puissances de λ . Ce développement s'effectue en utilisant les techniques classiques de la théorie des perturbations ; on obtient :

$$\rho(t) = \left\{ 1 + \frac{\lambda}{i\hbar} \int_0^t dt_1 H_{ep}^x(-t_1) + \left(\frac{\lambda}{i\hbar}\right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 H_{ep}^x(-t_2) H_{ep}^x(-t_1) + \dots \right\} \{\rho_0\} \quad (13)$$

où l'opérateur $H_{ep}^x(-t)$ est défini par :

$$H_{ep}^x(-t) = e^{(\hat{H}_e^x + H_p^x)\frac{t}{i\hbar}} H_{ep}^x e^{-(\hat{H}_e^x + H_p^x)\frac{t}{i\hbar}} \quad (14)$$

Ayant déterminé $\rho(t)$, nous pouvons passer au calcul du vecteur densité de courant.

III - CALCUL DE $\langle \vec{J} \rangle$

Le calcul de la valeur moyenne de l'opérateur densité de courant au second ordre en λ s'effectue en reportant le développement (13) dans :

$$\langle \vec{J} \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Tr } \vec{J} \rho(t) \quad (15)$$

Nous nous limitons au calcul des composantes $\langle J_x \rangle$ et $\langle J_y \rangle$ et pour les mêmes raisons qu'au chapitre 2, nous préférons raisonner sur l'opérateur $J_x + i J_y$ dont l'expression pour un cristal de volume unité s'écrit :

$$J_x + i J_y = i e \frac{E}{B} \sum_{\alpha} a_{\alpha}^+ a_{\alpha} - 2ie \left(\frac{\hbar \omega_c}{2m} \right)^{1/2} \sum_{\alpha} (n + 1)^{1/2} a_{\alpha+1}^+ a_{\alpha} \quad (16)$$

Les développements - présentés dans l'annexe 2 - n'offrent pas de difficulté

et conduisent à :

$$\begin{aligned} \langle J_y \rangle &= ne \frac{E}{B} \\ \langle J_x \rangle &= e \sum_{\alpha, \alpha'} \sum_q \frac{\hbar q_y}{m\omega_c} \left[\mathcal{N}_q F_{\alpha} (1 - F_{\alpha'}) - (1 + \mathcal{N}_q) F_{\alpha'} (1 - F_{\alpha}) \right] \\ &\quad \frac{2\pi}{\hbar} |\tilde{\gamma}_{\alpha\alpha'}(q)|^2 \delta(\tilde{\epsilon}_{\alpha} - \tilde{\epsilon}_{\alpha'} + \hbar\omega_q) \end{aligned} \quad (17)$$

Les formules (17) sont valables quelles que soient les fonctions F_{α} et $\mathcal{N}_q$ pourvu qu'elles satisfassent les conditions (6a) et (6b) et que $\mathcal{N}_q$ soit invariant dans le changement du vecteur d'ondes $\vec{q}$ en son opposé $-\vec{q}$. En résumé, les résultats ci-dessus reposent essentiellement sur la validité de l'équation d'évolution (10), les hypothèses de factorisation et de diagonalité de l'opérateur densité initial ρ_0 et la validité du développement au second ordre en λ .

Avant de passer au calcul de la puissance $\langle P \rangle$, formulons un certain nombre de remarques d'importance inégale sur la dépendance en E de $\langle J_x \rangle$ et sur les choix possibles des fonctions $\mathcal{N}_q$ et F_{α} .

1° Remarque sur le terme $|\tilde{\gamma}_{\alpha, \alpha'}(\vec{q})|^2$. Ce terme est indépendant du champ électrique E . En effet, d'après (8), ce carré ne peut faire intervenir E que dans le terme :

$$|\tilde{J}_{n, k_y; n', k'_y}(\vec{q}_x)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dx \phi_n(x - \tilde{X}_{k_y}) e^{iq_x x} \phi_{n'}(x - \tilde{X}_{k'_y}) \right|^2 \quad (18)$$

Il suffit d'effectuer le changement de variable $x' = x - \tilde{X}_{k_y}$ dans l'intégrale et de remarquer ensuite que $\tilde{X}_{k'_y} - \tilde{X}_{k_y}$ est indépendant de E (cf. (2.4)) pour démontrer le résultat énoncé. Par conséquent

$$|\tilde{\gamma}_{\alpha, \alpha'}(\vec{q})|^2 = |\gamma_{\alpha, \alpha'}(\vec{q})|^2.$$

Le même changement de variable montre aisément que $|\tilde{J}_{n,k_y;n',k'_y}(q_x)|^2$ est une fonction paire par rapport à q_x et par rapport à la différence :

$$\tilde{X}_{k'_y} - \tilde{X}_{k_y} = -\frac{\hbar}{m\omega_c} (k'_y - k_y) \quad (19)$$

Pour établir cette dernière propriété, il faut tenir compte des propriétés de symétrie des fonctions d'Hermite :

$$\phi_n(x) = (-1)^n \phi_n(-x) \quad (20)$$

2° Remarque sur le terme $\delta(\tilde{\varepsilon}_\alpha - \tilde{\varepsilon}_{\alpha'} + \hbar\omega_q)$. Le champ électrique intervient linéairement dans l'argument de la distribution puisque d'après (4) :

$$\tilde{\varepsilon}_\alpha - \tilde{\varepsilon}_{\alpha'} + \hbar\omega_q = \varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\alpha'} - \frac{E}{B} \hbar(k_y - k'_y) + \hbar\omega_q \quad (21)$$

Pour des besoins ultérieurs, développons en série de puissances de E la distribution :

$$\begin{aligned} \delta(\tilde{\varepsilon}_\alpha - \tilde{\varepsilon}_{\alpha'} + \hbar\omega_q) &= \delta(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\alpha'} + \hbar\omega_q) + \frac{E}{B} \hbar(k_y - k'_y) \delta^{(1)}(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\alpha'} + \hbar\omega_q) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{p!} \left(\frac{E}{B} \hbar(k_y - k'_y) \right)^p \delta^{(p)}(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\alpha'} + \hbar\omega_q) + \dots \quad (22) \end{aligned}$$

Nous avons ainsi fait apparaître les dérivées successives de la distribution $\delta(x)$.

3° Remarques préliminaires sur le choix de $\mathcal{N}_q$ et F_α . Nous examinons maintenant le crochet :

$$(\mathcal{N}_q F_\alpha (1 - F_{\alpha'}) - (1 + \mathcal{N}_q) F_{\alpha'} (1 - F_\alpha)) \quad (23)$$

D'après la définition (6b), nous savons que $\mathcal{N}_q$ représente le nombre moyen de phonons dans un état d'énergie $\hbar\omega_q$ avant que l'interaction électrons-phonons ne se soit fait sentir. $\mathcal{N}_q$ est évidemment indépendant du champ électrique quand $\tilde{H}_{ep} = 0$, et il est raisonnable d'admettre que le gaz de phonons est initialement en équilibre thermique caractérisé par la température T_0 . On

peut donc choisir pour $\mathcal{N}_q$ la fonction :

$$\mathcal{N}_q = N_q = \left(\exp \frac{\hbar\omega_q}{kT_0} - 1 \right)^{-1} \quad (24)$$

Pour le facteur F_α qui représente la probabilité d'occupation par un électron de l'état α avant l'introduction du couplage électrons-phonons, diverses solutions plus ou moins réalistes apparaissent.

On peut tout d'abord supposer que l'état initial a été obtenu en appliquant au gaz d'électrons le champ électrique, de façon quasi-statique ; si l'on admet alors la validité du théorème adiabatique, la distribution des électrons dans les états accessibles est la même avant et après l'application du champ électrique. Dans ce cas :

$$F_\alpha = f_\alpha^0 = \left(\exp \frac{\varepsilon_\alpha - \xi}{kT_0} + 1 \right)^{-1} \quad (25)$$

à condition d'admettre que la température des deux gaz d'électrons et de phonons était la même initialement et est restée la même pendant la transformation quasi-statique.

Signalons qu'un tel choix a été fait par Adams et Holstein dans leur célèbre article⁽⁴⁾ sur les phénomènes linéaires.

A partir de (24) et (25), nous pouvons tirer quatre résultats concernant $\langle J_x \rangle$.

a) En l'absence de champ électrique, on déduit de la formule (17) dans laquelle on a préalablement fait $E = 0$, que la composante $\langle J_x \rangle$ est bien nulle.

b) $\langle J_x \rangle^{(1)}$, la composante de $\langle J_x \rangle$ linéaire en E , s'obtient à partir de (17) et du développement (22) limité à ses deux premiers termes. Nous trouvons :

$$\begin{aligned} \langle J_x \rangle^{(1)} = e^2 E \sum_{\alpha, \alpha'} \sum_q \left(\frac{\hbar q_y}{m\omega_c} \right)^2 & \left[N_q f_\alpha^0 (1 - f_{\alpha'}^0) - (1 + N_q) f_{\alpha'}^0 (1 - f_\alpha^0) \right] \\ & \frac{2\pi}{\hbar} |\gamma_{\alpha, \alpha'}(q)|^2 \delta^{(1)}(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\alpha'} + \hbar\omega_q) \end{aligned} \quad (26)$$

En utilisant la relation :

$$g(x) \delta'(x - a) = g(a) \delta'(x - a) - g'(a) \delta(x - a) \quad (27)$$

Nous transformons (26) en :

$$J_x^{(1)} = \frac{e^2 E}{kT_0} \sum_{\alpha, \alpha'} \sum_q \left(\frac{\hbar q_y}{m\omega_c} \right)^2 \left[N_q f_{\alpha}^0 (1 - f_{\alpha'}^0) + (1 + N_q) f_{\alpha'}^0 (1 - f_{\alpha}^0) \right] \frac{2\pi}{\hbar} |\gamma_{\alpha\alpha'}(q)|^2 \delta(\epsilon_{\alpha} - \epsilon_{\alpha'} + \hbar\omega_q) \quad (28)$$

Ce dernier résultat est identique à tous ceux de la littérature scientifique traitant des phénomènes galvanomagnétiques linéaires en champs croisés.

c) Tous les termes pairs en E dans le développement de $\langle J_x \rangle$ en puissances de E à l'aide de (22) sont nuls ; ce résultat est évident physiquement et pour le démontrer, écrivons le terme en E^{2p} du développement de $\langle J_x \rangle$.

$$\begin{aligned} \langle J_x \rangle^{(2p)} &= e(eE)^{2p} \sum_{n, k_y, k_z} \sum_{n', k'_y, k'_z} \sum_q \left(\frac{\hbar q_y}{m\omega_c} \right)^{2p+1} \left[N_q f_{\alpha}^{(0)} (1 - f_{\alpha'}^0) \right. \\ &\quad \left. - (1 + N_q) f_{\alpha'}^0 (1 - f_{\alpha}^0) \right] \delta^{(2p)}(\epsilon_{nk_z} - \epsilon_{n'k'_z} + \hbar\omega_q) \frac{2\pi}{\hbar} \delta_{k_y, k'_y + q_y} \\ &\quad \delta_{k_z, k'_z + q_z} \left| J_{n, k_y; n', k'_y}(q_x) \right|^2 \end{aligned} \quad (29)$$

Après les sommations sur k'_y et k'_z qui sont immédiates, il interviendra le terme :

$$\left| J_{n, k_y; n', k_y - q_y}(q_x) \right|^2$$

qui, contrairement à son apparence, ne dépend pas de k_y et est une fonction paire de q_x et q_y ; alors, du fait de l'existence du facteur $\left(\frac{\hbar q_y}{m\omega_c} \right)^{2p+1}$ qui est une fonction impaire de q_y , la sommation sur q_y qui intervient dans (21) donnera un résultat nul. Donc $\langle J_x \rangle^{(2p)} = 0, \forall p$.

d) Passons enfin au terme d'ordre trois en E. Il s'écrit :

$$\langle J_x \rangle^{(3)} = e \frac{(eE)^3}{6} \sum_{\alpha, \alpha'} \sum_q \left(\frac{\hbar q_y}{m\omega_c} \right)^4 \left[N_q f_{\alpha}^0 (1 - f_{\alpha'}^0) - (1 + N_q) f_{\alpha'}^0 (1 - f_{\alpha}^0) \right]$$

$$\frac{2\pi}{\hbar} |\gamma_{\alpha\alpha'}(q)|^2 \delta^{(3)}(\epsilon_{\alpha} - \epsilon_{\alpha'} + \hbar\omega_q) \quad (30)$$

Donc si $\mathcal{N}_q$ et F_{α} sont respectivement égaux à N_q et f_{α}^0 , l'expression (30) de $\langle J_x \rangle^{(3)}$ est identique à celle obtenue dans le cadre de la première théorie (cf. (2.42 b)). Notons que l'identité se produit grâce au fait que $|\tilde{\gamma}_{\alpha\alpha'}(\vec{q})|^2 = |\gamma_{\alpha, \alpha'}(\vec{q})|^2$, c'est-à-dire que les modules des éléments de matrice de l'hamiltonien d'interaction électrons-phonons sont les mêmes dans la base des fonctions propres de $\tilde{h}_e$ et dans la base de celles de h_e .

Cette dernière remarque établit le lien entre les deux théories que nous exposons ici.

Revenons à F_{α} et aux autres choix possibles que nous pouvons faire. On pourrait imaginer qu'avant l'introduction de l'interaction électrons-phonons, les électrons se répartissent dans les états α suivant la statistique de Fermi-Dirac associée aux niveaux $\tilde{\epsilon}_{\alpha}$; en supposant que leur température est la même que celle des phonons, ceci conduit à écrire :

$$F_{\alpha} = f_{\alpha}^0 = \left(\exp \frac{\tilde{\epsilon}_{\alpha} - \xi}{kT_0} + 1 \right)^{-1} \quad (31)$$

Alors du fait du facteur $\delta(\tilde{\epsilon}_{\alpha} - \tilde{\epsilon}_{\alpha'} + \hbar\omega_q)$, on vérifie que l'introduction de (24) et (31) dans (17) conduit à $\langle J_x \rangle = 0$, car le crochet (23) est alors identiquement nul.

Ce résultat s'explique aisément ; en effet, nous considérons deux systèmes qui se trouvaient initialement et séparément en équilibre avec un thermostat à la température T_0 ; quand on fait interagir ensuite des deux systèmes, il ne se passe rien d'après la "loi zéro" de la thermodynamique.

Notons au passage que les choix (24) et (31) pour $\mathcal{N}_q$ et F_{α} ont néanmoins été faits dans certains articles⁽⁶⁾ sans que les auteurs se soient rendu compte de l'absurdité à laquelle cela conduisait ; en effet, désirant aboutir aux phénomènes linéaires, ils ont introduit ensuite dans leurs calculs des simplifications abusives donnant finalement une valeur de $\langle J_x \rangle^{(1)}$ non nulle.

Bien que nous n'ayons pas envisagé tous les $\mathcal{N}_q$ et F_α possibles, nous pouvons énoncer, à cette étape des raisonnements et des calculs, les conclusions partielles suivantes.

- Quand on fait interagir un gaz d'électrons libres, préalablement soumis à l'action de champs électrique et magnétique croisés, avec un gaz de phonons, il s'établit un courant $\langle \vec{J} \rangle$ perpendiculairement à $\vec{B}$. Si dans l'état initial l'opérateur densité décrivant les deux gaz satisfait aux propriétés (5), (6a) et (6b), dans le cadre d'une théorie limitée au second ordre par rapport au couplage électrons-phonons, la composante $\langle J_y \rangle$ se réduit à :

$$\langle J_y \rangle = ne \frac{E}{B} \quad (32)$$

quelle que soit l'intensité du champ électrique.

- De plus, pour obtenir une expression de la composante de $\langle J_x \rangle$ linéaire par rapport à E qui soit en accord avec les théories connues et éprouvées, il suffit de choisir pour les probabilités respectives d'occupation des états électroniques et de phonons les fonctions $F_\alpha = f_\alpha^0$ et $\mathcal{N}_q = N_q$ données par les formules (25) et (24).

- Si l'on fait choix de $\mathcal{N}_q = N_q$ et $F_\alpha = f_\alpha^0$ (donné par (31)), on obtient $\langle J_x \rangle = 0$.

- Quand on s'intéresse aux phénomènes non linéaires par rapport à E, on est donc amené à choisir pour F_α une fonction qui dans la limite des champs électriques faibles se confonde avec f_α^0 . Une première solution consiste à adopter la fonction f_α^0 quel que soit E. Une telle hypothèse, d'après la remarque 3°d ci-dessus, donne pour $\langle J_x \rangle$ ⁽³⁾ une expression analogue à celle obtenue dans notre première théorie exposée au chapitre II. Une seconde solution est de choisir pour F_α une fonction de la forme :

$$F_\alpha = f_\alpha = \left(\exp \frac{\epsilon_\alpha - \xi}{kT(E)} + 1 \right)^{-1} \quad (33)$$

contenant le paramètre $T(E)$ - appelé température électronique - dépendant de l'intensité du champ électrique et tel que $T(E) \rightarrow T_0$ quand $E \rightarrow 0$.

L'introduction de ce paramètre n'a de sens que s'il est possible de le déterminer. Or, précisément, nous pouvons faire intervenir ici les considérations évoquées au §3.I. Si dans (17) nous remplaçons $\mathcal{N}_q$ par N_q et F_α par

f_α , le courant $\langle J_x \rangle$ apparaîtra, en particulier, comme une fonction de T_0 et T . Nous allons voir au paragraphe suivant que la puissance $\langle P \rangle$, cédée par unité de volume aux phonons par les électrons, se calcule dans les mêmes conditions que $\langle J_x \rangle$ et dépend de T_0 et T . En écrivant qu'en régime permanent la relation $\langle J_x \rangle E = \langle P \rangle$ doit être satisfaite, nous obtiendrons une relation entre T_0 , T et E .

Nous aurions pu aussi penser choisir F_α sous la forme :

$$F_\alpha = \tilde{f}_\alpha = (\exp \frac{\tilde{\epsilon}_\alpha - \xi}{kT(E)} + 1)^{-1} \quad (34)$$

dépendant du paramètre $T(E) \neq T_0$ à déterminer. Le fait que $T(E)$ diffère de T_0 suffit pour que $\langle J_x \rangle$ ne soit plus nul contrairement au cas où F_α est égal à $\tilde{f}_\alpha^0$ donné par (30). Nous verrons toutefois au paragraphe suivant qu'avec un tel choix pour F_α la condition $\langle J_x \rangle E = \langle P \rangle$ ne permet pas de déterminer $T(E)$.

Nous reviendrons sur l'ensemble de ces considérations après le calcul de $\langle P \rangle$.

IV - CALCUL DE $\langle P \rangle$

L'énergie moyenne des phonons est définie à tout instant à partir de l'hamiltonien H_p des phonons et de l'opérateur densité $\rho(t)$ par :

$$\langle H_p(t) \rangle = \text{Tr } H_p \rho(t) \quad (35)$$

On en déduit que la puissance reçue par les phonons $\langle P \rangle$ en régime permanent est donnée par la formule :

$$\langle P \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Tr } H_p \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} \quad (36)$$

Soit, en tenant compte de (10) :

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{i\hbar} \text{Tr } H_p \left[\tilde{H}_e + \lambda H_{ep} + H_p, \rho(t) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{i\hbar} \text{Tr } \left[H_p, \tilde{H}_e + H_p + \lambda H_{ep} \right] \rho(t) \end{aligned} \quad (37)$$

On reconnaît, dans $\frac{1}{i\hbar} [\vec{H}_p, \hat{H}_e + H_p + \lambda H_{ep}]$, l'opérateur en représentation de Schrödinger associé à la dérivée par rapport au temps de la grandeur physique "énergie des phonons", au même titre que la vitesse :

$$\vec{v} = \frac{1}{i\hbar} [\vec{r}, \hat{H}_e + H_p + \lambda H_{ep}]$$

est l'opérateur associé à la dérivée par rapport au temps de la grandeur physique "position".

Comme H_p commute avec $\hat{H}_e$ et H_p , nous sommes réduits à calculer :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{i\hbar} \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Tr} [H_p, \lambda H_{ep}] \rho(t) \quad (38a)$$

Pour rester dans les limites de notre théorie qui suppose le couplage électrons-phonons faible, nous ne retiendrons dans le développement de $\langle P \rangle$ en puissance de λ que les termes jusqu'à l'ordre λ^2 . Dans ces conditions, il suffit de reporter dans (38) les deux premiers termes du développement (13). On vérifie aisément que le premier terme ne contribue pas à $\langle P \rangle$ car le commutateur $[H_p, \hat{H}_{ep}]$ ne possède pas d'éléments diagonaux dans la base où ρ_0 est diagonal. Donc :

$$\langle P \rangle = \frac{\lambda^2}{i\hbar} \text{Tr} \int_0^t dt_1 [H_p, H_{ep}] \cdot H_{ep}^x(-t_1) \{\rho_0\} \quad (39)$$

La trace ci-dessus s'évalue rapidement en utilisant les définitions (3), (7) et (14) et les règles de calcul déjà invoquées dans le calcul de $\langle J_x \rangle$. Tout calcul effectué, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \sum_{\alpha, \alpha'} \sum_q \hbar \omega_q \left(\mathcal{N}_q F_{\alpha} (1 - \psi_{\alpha'}) - (1 + \mathcal{N}_q) F_{\alpha'} (1 - \psi_{\alpha}) \right) \\ &\quad \frac{2\pi}{\hbar} |\tilde{\gamma}_{\alpha\alpha'}(q)|^2 \delta(\tilde{\epsilon}_{\alpha} - \tilde{\epsilon}_{\alpha'} + \hbar \omega_q) \end{aligned} \quad (40)$$

L'expression (40) de $\langle P \rangle$ ressemble beaucoup à celle (17) de $\langle J_x \rangle$. On passe de (17) à (40) en changeant le facteur :

$$\frac{e \hbar q_y}{m \omega_c} = \frac{\hbar q_y}{B} \quad \text{en} \quad \hbar \omega_q$$

Avant de faire quelques remarques importantes sur l'expression de $\langle P \rangle$, nous allons discuter de la puissance transmise par le champ électrique aux électrons. Si l'on désigne par H_F l'hamiltonien d'interaction entre les électrons et le champ électrique $\vec{E}$, l'énergie cédée aux électrons par $\vec{E}$ n'est autre que :

$$\langle H_F(t) \rangle = \text{Tr } H_F \rho(t) \quad (41)$$

où $H_F = \sum_i e \vec{E} \cdot \vec{r}_i$ (la sommation est étendue à tous les électrons).

En régime permanent, la puissance correspondante $\langle P' \rangle$ transmise aux électrons s'écrit :

$$\langle P' \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Tr } H_F \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} \quad (42)$$

Soit, en tenant compte de (10) :

$$\begin{aligned} \langle P' \rangle &= \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Tr } e \vec{E} \cdot \left(\sum_i \vec{v}_i \right) \rho(t) = \langle \vec{J} \rangle \cdot \vec{E} \\ &= \langle J_x \rangle E \end{aligned} \quad (43)$$

Ainsi $\langle J_x \rangle E$ apparaît bien comme la puissance cédée par le champ électrique aux électrons ainsi que nous l'avions intuitivement écrit dans l'introduction.

Revenons maintenant à l'expression (40) de $\langle P \rangle$ qui, comme la formule (17) donnant $\langle J_x \rangle$, requiert quelques commentaires.

1° Remarque sur les phénomènes linéaires. Nous avons vu au §3.III qui précède que le calcul de $\langle J_x \rangle^{(1)}$ devait être effectué en prenant $\mathcal{N}_q = N_q$, $F_\alpha = f_\alpha^0$ et en développant le terme $\delta(\tilde{\epsilon}_\alpha - \tilde{\epsilon}_\alpha + \hbar \omega_q)$ jusqu'au premier ordre en E , à l'aide de (22). En appliquant ces recettes, on trouve que le développement de $\langle P \rangle$ en puissance de E a ses termes d'ordres zéro et un nuls. Ce résultat est heureux, car il correspond au fait physique que la puissance reçue par les phonons - égale en régime permanent à la puissance cédée aux électrons par le champ électrique - doit varier au moins en E^2 .

2° Remarques concernant certains choix de $\mathcal{N}_q$ et F_α . Fixons $\mathcal{N}_q$ égal à N_q .

a) Si l'on fait $\psi_\alpha = \tilde{f}_\alpha^0$ (cf. (31)) dans (40), on trouve $\langle P \rangle = 0$, pour les mêmes raisons que nous avons obtenu $\langle J_x \rangle = 0$ dans ce cas.

b) Si l'on fait $\psi_\alpha = \tilde{f}_\alpha$ (cf. (34)), la réaction $\langle J_x \rangle E = \langle P \rangle$ qui devrait déterminer le paramètre $T(E)$ intervenant dans $\tilde{f}_\alpha$ se transforme en :

$$\sum_{\alpha, \alpha'} \sum_q \mathcal{H}(\omega_q + q_y \frac{E}{B}) (\tilde{f}_\alpha - \tilde{f}_{\alpha'}) N_q \frac{e^{\frac{\hbar\omega_q}{kT}} - e^{\frac{\hbar\omega_q}{kT_0}}}{e^{\frac{\hbar\omega_q}{kT}} - 1} \frac{2\pi}{\hbar} |\gamma_{\alpha\alpha'}(q)|^2 \delta(\tilde{\epsilon}_\alpha - \tilde{\epsilon}_{\alpha'} + \hbar\omega_q) = 0 \quad (44)$$

La formule (44) ne permet pas de déterminer T en fonction de T_0 et E dans au moins deux cas fondamentaux : celui des phonons optiques où $\hbar\omega_q = c^{te}$ et celui des phonons acoustiques dans la limite des hautes températures où $\frac{\hbar\omega_q}{kT} \ll 1$ et :

$$N_q \frac{e^{\frac{\hbar\omega_q}{kT}} - e^{\frac{\hbar\omega_q}{kT_0}}}{e^{\frac{\hbar\omega_q}{kT}} - 1} = \frac{k(T_0 - T)}{\hbar\omega_q}$$

En effet, dans ces deux cas, en dehors de la solution $T = T_0$ qui conduit à l'absurdité $\langle J_x \rangle = 0$, on constate, en examinant attentivement ce qu'il advient de (44) que la température $T(E)$ est indépendante de T_0 . Il est donc impossible qu'elle tende vers T_0 quand $E \rightarrow 0$, ce qui est une condition impérative pour retrouver les phénomènes linéaires.

A ce stade de nos raisonnements, nous nous retrouvons dans la situation suivante :

- ou bien nous ne faisons pas intervenir de considérations énergétiques et il n'est pas question d'introduire de paramètre ajustable dans la théorie ;

un examen de toutes les fonctions F_α envisagées dans le §3.III montre que seule $F_\alpha = f_\alpha^0$ donnée par (25) est acceptable : nous retombons sur les résultats de la première théorie du chapitre 2.

- ou bien nous tenons compte de la relation $\langle J_x \rangle E = \langle P \rangle$ et alors, toujours parmi les fonctions que nous avons considérées, seule $F_\alpha = f_\alpha$ donnée par (33) peut être retenue. Les résultats déduits de $\mathcal{N}_q = N_a$ et $F_\alpha = f_\alpha$ constitueront ceux de la seconde théorie.

Dans la première théorie, le courant $\langle J_x \rangle$ ne dépendra que du paramètre T_0 et nous le noterons $\langle J_x(T_0) \rangle$, tandis que dans la seconde, il dépendra des deux paramètres T_0 et T et nous le noterons $\langle J_x(T_0, T) \rangle$. Le second paramètre T sera lui-même fonction de T_0 et E . D'après la remarque 3°d du paragraphe précédent, nous obtiendrons $\langle J_x(T_0) \rangle^{(3)}$ à partir de $\langle J_x(T_0, T) \rangle^{(3)}$ en faisant $T = T_0$. Il suffit donc d'évaluer $\langle J_x \rangle^{(3)}$ dans le cadre de la seconde théorie pour tout obtenir.

3° Remarque sur la relation $\langle J_x \rangle E = \langle P \rangle$. A l'ordre en λ par rapport auquel nous avons calculé $\langle J_x \rangle$ et P , ces deux valeurs moyennes sont proportionnelles à λ^2 (elles n'ont pas de termes en λ^0 ou λ^1). Le facteur λ^2 s'élimine donc quand on écrit l'égalité $\langle J_x \rangle E = \langle P \rangle$. Par conséquent, T dépend bien de T_0 , de E et de la nature du couplage électrons-phonons, mais il est indépendant de l'intensité de ce dernier. Donc aussi faible que soit le couplage électrons-phonons et tant qu'il n'est pas rigoureusement nul, les paramètres T , T_0 et E ne sont pas indépendants et la relation qui existe entre eux ne dépend pas de l'intensité du couplage.

V - CONCLUSION

A l'aide de toutes les remarques que nous avons faites dans les paragraphes qui précèdent, nous pouvons présenter cette seconde théorie des phénomènes non linéaires de la façon suivante.

Nous cherchons à décrire un système constitué de deux gaz d'électrons et de phonons en présence des champs croisés. Dans l'état initial, l'interaction électrons-phonons ne sera pas rigoureusement nulle, mais infiniment petite. Alors, du point de vue de la répartition statistique des particules dans leurs états possibles, nous avons le droit de factoriser l'opérateur densité décrivant l'état initial sous la forme (5) et de prendre pour F_α et $\mathcal{N}_q$ des fonctions

décrivant un équilibre thermique se produisant à des températures T et T_0 à priori différentes. En fait, la relation $\langle J_x \rangle = E = \langle P \rangle$ qui est indépendante de λ et qui existe dès que λ n'est pas rigoureusement nul, impose une relation entre T , T_0 et E . Donc, même dans l'état initial, les températures T_0 et T ne sont pas indépendantes.

Ces conditions initiales étant admises, il ne reste plus qu'à introduire une interaction électrons-phonons non infiniment petite. Dans la mesure où elle reste faible - pour pouvoir effectuer un traitement de perturbation limité au second ordre en λ - l'expression de $\langle J_x(T_0, T) \rangle$ se calcule sans trop de difficultés.

Il reste cependant un point obscur dans ce qui précède : pourquoi avons-nous choisi pour F_α l'expression $(\exp \frac{\epsilon_\alpha - \xi}{kT} + 1)^{-1}$? Ce à quoi nous aurions été le plus enclin aurait été de prendre $\psi_\alpha = (\exp \frac{\epsilon_\alpha - \xi}{kT} + 1)^{-1}$ décrivant ainsi un gaz d'électrons indépendants en équilibre à la température T ; mais nous avons vu que ce n'était pas possible. C'est cette difficulté qui nous a fait nous rabattre sur la première expression et nous devons avouer ne pas pouvoir justifier rigoureusement cette manière de procéder. Toutefois dans les chapitres suivants, nous verrons qu'un tel choix permet de retrouver certains résultats établis à partir de l'équation de Boltzmann et d'interpréter semi-quantitativement certains résultats expérimentaux. C'est en fait les deux raisons qui nous ont conduit à poursuivre dans la direction que nous avions choisie.

CHAPITRE 4

LES DEVIATIONS PAR RAPPORT A LA LOI D'OHM. I-LIMITE CLASSIQUE

Nous abordons dans ce chapitre et le suivant le calcul du coefficient β associé à un gaz d'électrons non dégénéré et intervenant dans le développement de $\langle J_x \rangle$ en puissance de E , quand ce développement est limité à l'ordre trois :

$$\langle J_x \rangle = \langle J_x \rangle^{(1)} (1 + \beta E^2) \quad (1)$$

Cette étude de β n'est valable que si la condition $\omega_c \tau \gg 1$ est remplie ; elle est scindée en deux parties selon que l'une ou l'autre des inégalités $\hbar\omega_c \ll kT_0$ ou $\hbar\omega_c \gg kT_0$ est vérifiée. Dans le premier cas, les niveaux d'énergie correspondant aux grands nombres quantiques sont remplis : nous dirons étudier la limite classique. Dans le second, seuls les premiers niveaux de Landau sont occupés (et si la valeur de l'induction magnétique est suffisamment élevée, seul le premier : nous dirons étudier la limite (ou l'extrême limite) quantique.

Par ailleurs, nous envisageons différentes sortes d'interaction électrons-phonons. Nous distinguerons pour les phonons acoustiques entre le couplage par potentiel de déformation et le couplage piézoélectrique ; nous traiterons enfin du cas où les phonons sont du type optique.

Les développements qui suivent relèvent pratiquement du calcul intégral élémentaire ; cependant, ils offrent des difficultés que seules des approximations physiques permettent de surmonter. Nous nous sommes donc attaché à introduire un certain nombre de paramètres sans dimension et à obtenir, pour certaines valeurs extrêmes de ces paramètres, des expressions de β facilement exploitables lors du dépouillement des résultats expérimentaux. Nous avons pris soin de faire apparaître les limites de validité de nos formules.

Nous commencerons par transformer l'expression (3.17) de $\langle J_x \rangle$ et nous calculerons sa composante $\langle J_x(T_0, T) \rangle^{(3)}$. A la fin de ce calcul, en faisant $T = T_0$, nous obtiendrons l'expression de $\langle J_x \rangle^{(3)}$ associée à la première théorie. Dans un deuxième temps, partant de la formule (3.40) donnant $\langle P \rangle$,

nous évaluerons T en fonction de T_0 et E à l'aide de la relation $\langle J_x \rangle E = \langle P \rangle$. Dans la mesure où nous ne sommes intéressés que par les faibles déviations par rapport à la loi d'Ohm, nous rechercherons un développement de T en puissance de E limité à l'ordre le plus bas que nous reporterons dans $\langle J_x(T_0, T) \rangle$. Les deux développements dont nous venons de parler introduiront les limites de validité que nous ferons apparaître.

I - EXPRESSION GENERALE DE $\langle J_x \rangle$ EN LIMITE CLASSIQUE ($\hbar\omega_c \ll kT$)

Le point de départ de ce calcul est l'expression suivante de $\langle J_x \rangle$:

$$\langle J_x \rangle = e \sum_{\alpha, \alpha'} \sum_q \frac{\hbar q_y}{eB} \left(N_q f_{\alpha} (1 - f_{\alpha'}) - (1 + N_q) f_{\alpha'} (1 - f_{\alpha}) \right) \frac{2\pi}{\hbar} |\gamma_{\alpha\alpha'}(q)|^2 \delta(\tilde{\epsilon}_{\alpha} - \tilde{\epsilon}_{\alpha'} + \hbar\omega_q) \quad (2)$$

$$\text{avec : } N_q = \left(\exp \frac{\hbar\omega_q}{kT} - 1 \right)^{-1} \quad \text{et} \quad f_{\alpha} = \left(\exp \frac{\epsilon_{\alpha} - \xi}{kT} + 1 \right)^{-1} \quad (3)$$

L'énergie de Fermi ξ intervenant dans (3) est déterminée par la condition de normalisation :

$$N = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \quad (4)$$

L'existence du terme $|\gamma_{\alpha\alpha'}(q)|^2$ implique que $k'_y = q_y + k_y$ et $k'_z = q_z + k_z$. Par conséquent :

$$\tilde{\epsilon}_{\alpha} - \tilde{\epsilon}_{\alpha'} + \hbar\omega_q = \epsilon_{\alpha} - \epsilon_{\alpha'} + \hbar\omega_q^* \quad (5)$$

$$\text{à condition de définir } \omega_q^* = \omega_q + q_y \frac{E}{B} \quad (6)$$

On peut donner une interprétation physique à la quantité ω_q^* qui interviendra souvent par la suite. En effet, $q_y \frac{E}{B} = - \vec{q} \cdot \vec{V}_0$, où $\vec{V}_0$ est la vitesse d'entraînement des électrons dans la direction perpendiculaire à $\vec{E}$ et $\vec{B}$. En faisant référence aux changements de repères en cinématique, ω_q^* s'interprète comme la pulsation des phonons perçue par les électrons se considérant comme immobiles dans un repère en mouvement à la vitesse $\vec{V}_0$.

Transformons (2) de façon à séparer autant qu'il est possible les termes liés aux états électroniques de ceux liés aux phonons. Grâce à la distribution

δ assurant la conservation de l'énergie dans les transitions électroniques, nous obtenons :

$$\langle J_x \rangle = \sum_q \frac{\hbar q_y}{B} \left[N_q(T_o, \omega_q) - N_q(T, \omega_q^*) \right] S(\vec{q}) \quad (7)$$

avec :

$$S(\vec{q}) = n_{n, k_y^\Sigma, k_z} n'_{n', k_y^\Sigma, k'_z} \{ f(\epsilon_n(k_z)) - f(\epsilon_{n'}(k'_z)) \} \delta_{k'_y, k_y + q_y} \delta_{k'_z, k_z + q_z} \\ \frac{2\pi}{\hbar} |C(q)|^2 |J_{n, k_y; n', k'_y}(q_x)|^2 \delta(\epsilon_n(k_z) - \epsilon_{n'}(k'_z) + \hbar\omega_q^*) \quad (8)$$

Le calcul de $S(\vec{q})$ est reproduit dans l'annexe 3. La seule approximation qui interviendra consistera à supposer que la condition $\hbar\omega_c \ll kT$ est remplie ; elle conduira à :

$$S(\vec{q}) = \frac{m^2}{2\pi\hbar^5} \frac{|C(q)|^2}{q} \int_{\epsilon_{\min}(q)}^{\infty} d\epsilon \{ f(\epsilon) - f(\epsilon + \hbar\omega_q^*) \} \quad (9)$$

$$\text{avec : } \epsilon_{\min}(q) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{q}{2} - \frac{m\omega_q^*}{\hbar q} \right)^2 \quad (10a)$$

$$\text{et : } \epsilon_{\min}(q) + \hbar\omega_q^* = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{q}{2} + \frac{m\omega_q^*}{\hbar q} \right)^2 \quad (10b)$$

On peut trouver une interprétation physique de la quantité $\epsilon_{\min}(q)$. En effet, considérons un schéma purement classique où l'on ne ferait pas intervenir la quantification des niveaux d'énergie introduite par l'induction magnétique, et où un état électronique serait totalement défini par la donnée du vecteur d'onde $\vec{k}$; l'énergie d'un électron dans un tel état serait égale à $\hbar^2 k^2 / 2m$. Par ailleurs, il verrait des phonons d'énergie $\hbar\omega_q^*$ et interagirait avec eux en suivant les deux lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement :

$$\frac{\hbar^2}{2m} k'^2 = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \pm \hbar\omega_q^* \quad (11)$$

$$\vec{k}' = \vec{k} \pm \vec{q} \quad (12)$$

Ces deux lois ne peuvent être vérifiées que si :

$$k > \frac{m\omega_q^*}{\hbar q} + \frac{q}{2} \quad (13)$$

La quantité $\epsilon_{\min}(q)$ apparait donc comme l'énergie minimum que doit avoir un électron pour absorber un phonon, tandis que $\epsilon_{\min}(q) + \hbar\omega_q^*$ est l'énergie minimum de l'électron quand il émet un phonon.

Revenons à $\langle J_x \rangle$ et à $S(\vec{q})$. Nous allons restreindre notre étude au cas où le gaz d'électrons est non dégénéré. Nous réservons le cas du gaz dégénéré, qui n'est pas plus difficile à régler, pour un travail ultérieur. Dans ces conditions, les énergies $\epsilon_{\min}(q)$ et $\epsilon_{\min}(q) + \hbar\omega_q^*$ étant toujours positives quel que soit $\epsilon > \epsilon_{\min}(q)$, nous pouvons remplacer respectivement $f(\epsilon)$ et $f(\epsilon + \hbar\omega_q^*)$ par $\exp - \frac{\epsilon - \xi}{kT}$ et $\exp - \frac{\epsilon + \hbar\omega_q^* - \xi}{kT}$.

Avec cette approximation :

$$S(\vec{q}) \approx \frac{m^2}{2\pi\hbar^5} \frac{|C(q)|^2}{q} kT e^{\frac{\xi}{kT}} e^{-\frac{\hbar^2}{2mkT} \left(\frac{q}{2} + \frac{m\omega_q^*}{\hbar q} \right)^2} \frac{\hbar\omega_q^*}{(e^{\frac{\hbar\omega_q^*}{kT}} - 1)} \quad (14)$$

Reportons ce résultat dans (7) et passons de la sommation discrète sur q à une intégrale à l'aide de la transformation usuelle :

$$\sum_q \implies \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \quad \text{avec} \quad q < q_{\max} \quad (15)$$

($q_{\max}$ est la valeur du vecteur d'onde des phonons en bordure de la première zone de Brillouin.)

Nous obtenons :

$$\langle J_x \rangle = \frac{n m^{1/2}}{(2\pi)^{5/2} \hbar(kT)^{1/2} B} \int_{q \leq q_{\max}} d^3q \frac{q_y}{q} |C(q)|^2 e^{-\frac{\hbar^2}{2mkT} \left(\frac{q}{2} + \frac{m\omega_q^*}{\hbar q} \right)^2} \frac{\hbar\omega_q^*}{e^{\frac{\hbar\omega_q^*}{kT}} - e^{\frac{\hbar\omega_q}{kT_0}} - 1} \quad (16)$$

Pour aboutir à (16), nous avons tenu compte de la condition de normalisation (4)

qui, dans le cas d'un gaz d'électrons non dégénéré et dans la limite classique $\hbar\omega_c \ll kT$, relie l'énergie de Fermi ξ et la densité électronique n selon la loi :

$$n = 2 \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} e^{\frac{\xi}{kT}} \quad (17)$$

Le résultat (16) est valable quel que soit le type de couplage entre les électrons et les phonons. Seules les valeurs de $|C(q)|^2$ et de ω_q diffèrent d'une sorte d'interaction à l'autre. Rappelons que la seule condition qui permet de passer de (2) à (16) s'écrit $\hbar\omega_c \ll kT$.

Nous passons maintenant à un calcul plus détaillé de $\langle J_x \rangle$ en distinguant deux cas selon la nature acoustique ou optique des phonons.

II - CALCUL DE $\langle J_x \rangle$ DANS LE CAS DE L'INTERACTION ELECTRONS-PHONONS ACOUSTIQUES

Dans tout ce paragraphe et le suivant, nous nous plaçons dans le modèle de Debye ; la loi de dispersion des phonons acoustiques impose donc que :

$$\omega_q = sq \quad (18)$$

avec s comme vitesse du son. On en déduit :

$$\omega_q^* = sq \left(1 + \frac{v_o}{s} \frac{q_y}{q} \right) \quad (19)$$

Par ailleurs, deux types de couplages entre électrons et phonons sont à envisager : le premier est un couplage dû au potentiel de déformation (8) et tel que :

$$|C(q)|^2 = D^{(3)}_q \quad \text{avec} \quad D^{(3)} = \frac{E_o^2 \hbar}{\rho s} \quad (20)$$

La constante E_o^2 est une constante, caractéristique du matériau, fixant l'intensité du couplage ; ρ est la masse spécifique.

Le second couplage intervient dans les corps piézoélectriques⁽⁹⁾ ; alors :

$$|C(q)|^2 = D^{(1)} \frac{1}{q} \quad (21)$$

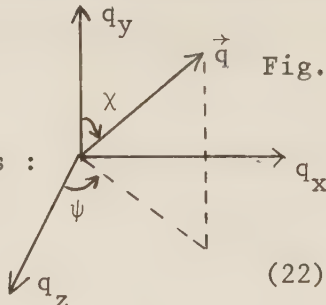
La constante $D^{(1)}$ possède une expression compliquée faisant intervenir des constantes élastiques et piézoélectriques ; on en trouvera la théorie dans la référence (8).

Notons que les constantes $D^{(3)}$ et $D^{(1)}$ n'ont pas les mêmes dimensions, (l'utilité des indices (1) et (3) apparaîtra ci-dessous) et que nous avons - dans un but de simplification évident - négligé les effets d'anisotropie, ce qui peut poser quelques problèmes dans le cas du couplage piézoélectrique.

Nous poursuivons le calcul de $\langle J_x \rangle$ à partir de (16) en effectuant les opérations suivantes :

1°/ Nous passons en coordonnées sphériques en choisissant les angles polaires χ et ψ tels que la figure ci-contre l'indique

2°/ Nous procédons ensuite au changement de variables :

$$\left(\frac{mV_o^2}{2kT} \right)^{1/2} \cos \chi = u \quad \frac{\hbar s}{kT} q = t \quad \text{Fig. 1} \quad (22)$$


3°/ Nous introduisons la température de Debye θ définie par :

$$k\theta = \hbar s q_{\max} \quad (23)$$

ainsi que les deux paramètres sans dimension :

$$\gamma = \left(\frac{ms^2}{2kT} \right)^{1/2} = \frac{s}{V_T} \quad \text{et} \quad \gamma_o = \left(\frac{ms^2}{2kT_o} \right)^{1/2} = \frac{s}{V_{T_o}} \quad (24)$$

La vitesse V_T dont la définition $(2kT/m)^{1/2}$ correspond à la vitesse d'agitation des électrons à la température T est en général très supérieure à la vitesse du son s , dans la gamme des températures voisines de celle de l'ambiante.

Le paramètre γ^2 est donc susceptible de prendre des valeurs très inférieures à l'unité. Ainsi, à $T = 300^\circ K$, $V_T \approx 10^5$ m/s quand m est égal à la masse de l'électron libre ; par ailleurs, pour de très nombreux solides $s \approx 5 \cdot 10^3$ m/s ; par conséquent, $\gamma^2 \approx 10^{-4}$ dans cet exemple.

Après quelques développements, nous aboutissons pour les deux types de couplage à :

$$\langle J_x \rangle = \frac{n m^{1/2} D(p)}{(2\pi)^{3/2} \hbar(kT)^{1/2} B} \left(\frac{kT}{\hbar s} \right)^{p+1} \left(\frac{V_T}{V_0} \right)^2 \int_0^{\theta/T} dt \frac{t^p}{e^{\frac{t}{T_0}} - 1} \\ \int_{-\frac{V_0}{V_T}}^{+\frac{V_0}{V_T}} du u \left[e^{-\left(\frac{t}{4\gamma} - \gamma - u\right)^2} - e^{\frac{t}{T_0}} e^{-\left(\frac{t}{4\gamma} + \gamma + u\right)^2} \right] \quad (25)$$

à condition de poser :

$$p = 3 \quad \text{dans le cas du potentiel de déformation (P.D.)} \quad (26a)$$

$$\text{et } p = 1 \quad \text{dans le cas du couplage piézoélectrique (C.P.)} \quad (26b)$$

C'est ici qu'intervient la seconde approximation de notre calcul. Nous supposons que le champ électrique qui se trouve dans V_0 satisfait la condition

$$\frac{V_0}{V_T} \ll 1 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{E}{B} \ll V_T} \quad (27)$$

Remarquons alors que l'intégrale par rapport à la variable u qui figure dans (25) peut être développée suivant les puissances de $\frac{V_0}{V_T}$ à l'aide de la formule :

$$\int_{-\eta}^{+\eta} \phi(x) dx \approx 2\eta \left(\phi(0) + \frac{\eta^2}{3!} \phi^{(2)}(0) + \frac{\eta^4}{5!} \phi^{(4)}(0) + \frac{\eta^6}{7!} \phi^{(6)}(0) + \dots \right) \quad (28)$$

Si la condition (27) est vérifiée, on peut ne retenir que les premiers termes de (28) ; un calcul mathématique un peu long permet de s'assurer que si $\frac{E}{B} \ll V_T$, le terme $\frac{\eta^6}{7!} \phi^{(6)}(0)$ conduira en fin de calcul à une correction négligeable.

Grâce au développement (28), $\langle J_x \rangle$ se transforme en :

$$\langle J_x \rangle \approx \frac{\sqrt{2}}{3\pi^{3/2}} \frac{n m^{1/2} D(p)}{\hbar(kT)^{1/2} B} \left(\frac{kT}{\hbar s} \right)^{p+1} \frac{V_0}{V_T} e^{-\gamma^2} \int_0^{\theta/T} dt \frac{t^p}{e^{\frac{t}{T_0}} - 1} e^{-\frac{t^2}{16\gamma^2}} \\ \left\{ \left(\frac{t}{4\gamma} - \gamma \right) e^{\frac{t}{2}} + \left(\frac{t}{4\gamma} - \gamma \right) e^{-\frac{t}{2} + t \frac{T}{T_0}} \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \frac{V_0^2}{V_T^2} \left[-3 \left(\frac{t}{4\gamma} - \gamma \right) e^{\frac{t}{2}} + 2 \left(\frac{t}{4\gamma} - \gamma \right)^3 e^{\frac{t}{2}} - 3 \left(\frac{t}{4\gamma} + \gamma \right) e^{-\frac{t}{2} + t \frac{T}{T_0}} + 2 \left(\frac{t}{4\gamma} + \gamma \right)^3 e^{-\frac{t}{2} + t \frac{T}{T_0}} \right] \right\} \quad (29)$$

L'intégrale restant dans (29) est analysée dans l'annexe 4. Nous y montrons que si l'inégalité :

$$\boxed{\gamma = \frac{s}{V_T} \ll 1} \quad (30)$$

est vérifiée - et c'est très fréquemment le cas dans les expériences - les expressions de $\langle J_x \rangle$ se réduisent à :

- dans le cas du potentiel de déformation :

$$\begin{aligned} \langle J_x \rangle \approx & \frac{2^{9/2}}{3\pi^{3/2}} \frac{n m^{5/2} D^{(3)}}{s \hbar^5} \frac{e^{-\gamma^2}}{B^2} (kT)^{3/2} \frac{T_0}{T} E \left\{ 1 - 2\gamma^2 \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{5} \frac{V_0^2}{V_T^2} \left(1 + 6\gamma^2 - 18\gamma^2 \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) - 4\gamma^4 \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (31a)$$

- dans le cas du couplage piézoélectrique :

$$\begin{aligned} \langle J_x \rangle = & \frac{2^{3/2}}{3\pi^{3/2}} \frac{n m^{3/2} D^{(1)}}{s \hbar^3} \frac{e^{-\gamma^2}}{B^2} (kT)^{1/2} \frac{T_0}{T} E \left\{ 1 - 2\gamma^2 \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{5} \frac{V_0^2}{V_T^2} \left(-1 + 6\gamma^2 - 6\gamma^2 \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) - 4\gamma^4 \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (31b)$$

Ces résultats appellent deux remarques :

1° les termes barrés qui figurent dans (31a) et (31b) représentent, du fait de la condition $\gamma \ll 1$ et de ce que $\frac{T}{T_0}$ sera toujours voisin de 1 (ainsi que nous le verrons au paragraphe suivant), des corrections négligeables.

2° La composante linéaire en E de $\langle J_x \rangle$ s'obtient en faisant $T = T_0$ et en supprimant tous les termes qui ne sont pas d'ordre un en E ; par conséquent :

$$\langle J_x \rangle^{(1)} = \frac{2^{3p}}{3\pi^{3/2}} \frac{n m^{\frac{p+2}{2}} D^{(p)}}{s \hbar^{p+2}} e^{-\gamma_0^2} (kT_0)^{\frac{p}{2}} \frac{E}{B^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = 3 \text{ pour le P.D.} \\ p = 1 \text{ pour le C.P.} \end{cases} \quad (32)$$

Les résultats (32) figurent depuis longtemps dans la littérature^(10,11). (Le terme $e^{-\gamma_0^2}$ doit évidemment être remplacé par 1 dans le cadre de nos approximations.)

En tenant compte des deux remarques qui précèdent, les expressions (31a) et (31b) se mettent sous les formes finales relativement simples :

$$\langle J_x(T_o, T) \rangle = \langle J_x \rangle^{(1)} \left(\frac{T}{T_o} \right)^{\pm \frac{1}{2}} \left[1 \pm \frac{1}{5} \frac{V_o^2}{V_T^2} \right] \begin{cases} + \text{ pour le P.D.} \\ - \text{ pour le C.P.} \end{cases} \quad (32)$$

Avant de passer à l'étape suivante du calcul de T en fonction de T_o et E, nous pouvons, à partir de (32), déduire la valeur de $\langle J_x \rangle$ valable dans le cadre de la première théorie du chapitre 2. Il suffit pour cela (cf. Chapitre 3 §III) de faire T = T_o dans (32). Par conséquent :

$$\langle J_x(T_o) \rangle^{(3)} = \pm \frac{1}{5} \frac{V_o^2}{V_{T_o}^2} \langle J_x \rangle^{(1)} \quad (33)$$

Soit, en désignant par β_I le coefficient caractérisant les déviations par rapport à la loi d'Ohm dans le cadre de la première théorie :

$$\beta_I = \pm \frac{1}{5} \frac{1}{B^2 V_{T_o}^2} \begin{cases} + \text{ pour le P.D.} \\ - \text{ pour le C.P.} \end{cases} \quad (34)$$

Compte tenu de la condition (27), on conçoit que $\langle J_x \rangle^{(3)}$ soit un terme très petit devant $\langle J_x \rangle^{(1)}$. Par ailleurs, il faut noter le changement de signe de β_I quand on passe d'un type de couplage à l'autre.

III - DETERMINATION DE LA TEMPERATURE ELECTRONIQUE DANS LE CAS DE L'INTERACTION ELECTRONS-PHONONS ACOUSTIQUES. EXPRESSION FINALE DE $\langle J_x \rangle$ DANS LA SECONDE THEORIE

Nous avons établi au chapitre 3 (cf. §IV) que l'expression de la puissance $\langle P \rangle$ se déduisait de celle de $\langle J_x \rangle$ par le changement du facteur $\frac{\hbar q_y}{B}$ en $\hbar \omega_q$. Dans ces conditions, en utilisant l'expression (7) de $\langle J_x \rangle$, l'égalité $\langle J_x \rangle E = \langle P \rangle$ s'écrit :

$$\sum_q \hbar \omega_q^* \left[N_q(T_o, \omega_q) - N_q(T, \omega_q^*) \right] S(\vec{q}) = 0 \quad (35)$$

En reprenant l'expression (14) de $S(\vec{q})$ valable dans la limite classique $\hbar\omega_c \ll kT$ et pour un gaz de particules non dégénéré, (35) se réduit à :

$$\int_{q \leq q_{\max}} d^3q \omega_q \frac{|C(q)|^2}{q} e^{-\frac{\hbar^2}{2mkT} \left(\frac{q}{2} + \frac{m\omega_q}{\hbar q} \right)^2} \frac{\frac{\hbar\omega_q}{kT} - e^{\frac{\hbar\omega_q}{kT_o}}}{\frac{\hbar\omega_q}{kT_o} - 1} = 0 \quad (36)$$

Le calcul de cette intégrale s'effectue comme précédemment : passage en coordonnées sphériques, introduction des variables u et t et du paramètre γ . On obtient :

$$\int_0^{\theta/T} dt \frac{t^p}{e^{\frac{t}{T_o}} - 1} \int_{-\frac{V_o}{V_T}}^{+\frac{V_o}{V_T}} du \left(1 + \frac{u}{\gamma} \right) \left(e^{-\left(\frac{t}{4\gamma} - \gamma - u\right)^2} - e^{\frac{t}{T_o}} e^{-\left(\frac{t}{4\gamma} + \gamma + u\right)^2} \right) = 0 \quad (37)$$

où $p = 3$ ou 1 selon que l'on considère le P.D. ou le C.P.. Nous supposons alors que $V_o/V_T \ll 1$, de façon à ne conserver que les premiers termes du développement de l'intégrale en u par rapport au paramètre V_o/V_T . Ce développement repose sur la formule (28) et lorsqu'on utilise les intégrales $L_{\pm}^r$ définies dans l'annexe 4, il conduit à :

$$L_-^p \left(1 - \frac{1}{3} \frac{V_o^2}{V_T^2} \right) + \frac{2}{3} \frac{V_o^2}{V_T^2} \left(\frac{1}{16\gamma^2} L_-^{p+2} + \frac{1}{4\gamma^2} (1 - 2\gamma^2) L_+^{p+1} - (1 - \gamma^2) L_-^p \right) = 0 \quad (38)$$

Nous négligeons tout d'abord γ^2 devant 1 ; nous utilisons les résultats de l'annexe 4 qui sont valables quand $\gamma^2 \ll 1$. Nous obtenons :

$$\frac{T}{T_o} - 1 = \frac{1}{3} \frac{V_o^2}{s^2} \frac{1}{1 - \frac{V_o^2}{V_T^2} \left(1 - \frac{2}{3} (p+2)(p+1) \right)} \quad (39)$$

Au dénominateur du second membre de (39), on peut négliger les termes en $\frac{V_o^2}{V_T^2}$,

si bien que :

$$T = T_o \left(1 + \frac{1}{3} \frac{V_o^2}{s^2} \right) \quad \forall p \quad (40)$$

La température électronique est donc la même pour les deux types de couplages envisagés avec les phonons acoustiques. Elle est bien indépendante de l'intensité de l'interaction électrons-phonons et ne dépend de la nature du couplage que par la vitesse du son des phonons acoustiques.

En reportant cette valeur de T dans (32), nous aboutissons aux expressions finales de la densité de courant $\langle J_x \rangle$ calculée dans le cadre de la seconde théorie :

$$\langle J_x \rangle = \langle J_x \rangle^{(1)} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{V_o^2}{s^2} \right)^{\pm \frac{1}{2}} \left(1 \pm \frac{1}{5} \frac{V_o^2}{V_T^2} \right) \quad \begin{cases} + \text{ pour le P.D.} \\ - \text{ pour le C.D.} \end{cases} \quad (41)$$

Remarquons alors que, du fait de notre hypothèse $\gamma^2 \ll 1$, le facteur $\left(1 \pm \frac{1}{5} \frac{V_o^2}{V_T^2} \right)$ varie peu avec V_o par rapport au facteur $\left(1 + \frac{1}{3} \frac{V_o^2}{s^2} \right)^{\pm 1/2}$ et peut être remplacé par l'unité.

De plus, pour observer les premières déviations par rapport à la loi d'Ohm, il suffit de remplir la condition :

$$\frac{V_o^2}{s^2} \ll 1 \quad (42)$$

qui entraîne a fortiori $\frac{V_o^2}{V_T^2} \ll 1$ et qui permet d'écrire :

$$\langle J_x \rangle \approx \langle J_x \rangle^{(1)} \left(1 \pm \frac{1}{6} \frac{V_o^2}{s^2} \right) \quad (43)$$

En conclusion, le coefficient β_{II} caractérisant les premières déviations par rapport à la loi d'Ohm dans le cadre de la seconde théorie vaut :

$$\beta_{II} = \pm \frac{1}{6} \frac{1}{B s^2} \quad \begin{cases} + \text{ pour le P.D.} \\ - \text{ pour le C.P.} \end{cases} \quad (44)$$

En rapprochant ce résultat de celui obtenu pour β_I (cf. (34)), on constate que :

$$\beta_I = \frac{6}{5} \gamma_o^2 \beta_{II} \ll \beta_{II} \quad (45)$$

De plus, alors que β_I varie avec la température en T_o^{-1} , β_{II} en est indépendant. Toutefois, aucune expérience - en l'état actuel de nos connaissances - n'a été faite pour trancher entre ces deux valeurs. Il faut noter que des résultats identiques à (40) et (44) ont été obtenus auparavant⁽²⁾.

IV - CALCUL DE $\langle J_x \rangle$ DANS LE CAS DE L'INTERACTION ELECTRONS-PHONONS OPTIQUES

Le point de départ est l'expression générale (16) de $\langle J_x \rangle$, valable pour un gaz d'électrons dégénéré et dans la limite classique $\hbar\omega_c \ll kT$. Dans tout ce paragraphe et le suivant, la loi de dispersion des phonons optiques se réduit à :

$$\omega_q = c^{te} \quad (46)$$

Par ailleurs, le couplage électrons-phonons optiques est supposé être du type "polaire" et tel que⁽¹²⁾ :

$$|C(q)|^2 = \frac{D^{(o)}}{q} \quad (47)$$

où $D^{(o)}$ est un coefficient dépendant de la nature du cristal :

$$D^{(o)} = 2\pi \hbar\omega_q e^2 \left(\frac{1}{\epsilon_\infty} - \frac{1}{\epsilon_s} \right) \quad (48)$$

Les grandeurs ϵ_∞ et ϵ_s sont les constantes diélectriques du cristal à haute fréquence et à fréquence nulle.

L'indépendance de ω_q par rapport à q est un élément important dans la simplification des calculs. Ainsi $\langle J_x \rangle$ devient ici :

$$\langle J_x \rangle = \frac{n m^{1/2} D^{(o)}}{2(2\pi)^{5/2} \hbar(kT)^{1/2} B} \frac{e^{-\hbar\omega_q/2kT_o}}{\text{sh } \hbar\omega_q/2kT_o} \int_{q \leq q_{\max}} d^3q \frac{q_y}{q^3} e^{-\frac{\hbar^2}{2mkT} \left(\frac{q}{2} + \frac{m\omega_q^*}{\hbar q} \right)^2} \left(e^{\frac{\hbar\omega_q^*}{kT}} - e^{\frac{\hbar\omega_q}{kT_o}} \right) \quad (49)$$

Comme au §II :

1°/ nous passons en coordonnées sphériques (cf. Fig. 1) ;

2°/ nous procédons aux changements de variables :

$$\left(\frac{mV_o^2}{2kT}\right)^{1/2} \cos \chi = \frac{V_o}{V_T} \cos \chi = u \quad \text{et} \quad \left(\frac{\hbar}{2m\omega_q}\right)^{1/2} q = x^{1/2} \quad (50)$$

3°/ nous introduisons les paramètres sans dimension :

$$\alpha = \frac{\hbar\omega_q}{2kT} \quad \text{et} \quad \alpha_o = \frac{\hbar\omega_q}{2kT_o} \quad (51)$$

qui peuvent varier a priori dans de larges limites sans descendre, toutefois, à des valeurs très inférieures à l'unité.

Ces trois opérations nous conduisent à :

$$\langle J_x \rangle = \frac{n m D(o)}{8\pi^{3/2} \hbar^2 B} \frac{e^{-\alpha_o}}{\text{sh} \alpha_o} \alpha^{1/2} \frac{V_T^2}{V_o^2} \int_0^{\hbar q_{\max}^2 / 2m\omega_q} \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad (52)$$

$$\int_{-\frac{V_o}{V_T}}^{+\frac{V_o}{V_T}} du \, u \left[e^{-\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) - u\right)^2} - e^{2\alpha_o} e^{-\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + u\right)^2} \right]$$

Comme pour les phonons acoustiques, nous faisons intervenir ici la seconde approximation du calcul (après celle découlant de $\hbar\omega_c \ll kT$) en supposant que :

$$\frac{V_o}{V_T} \ll 1 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{E}{B} \ll V_T}$$

L'intégrale par rapport à u qui figure dans (52) peut être évaluée de la même façon que celle figurant dans (25), à l'aide de (28). Les calculs correspondants sont reportés dans l'annexe 5. Finalement, la composante $\langle J_x \rangle$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle J_x(T_o, T) \rangle = \langle J_x \rangle \left(\frac{T_o}{T} \right)^{3/2} \frac{K_1(\alpha)}{K_1(\alpha_o)} \operatorname{ch}(\alpha_o - \alpha) \left\{ 1 - \frac{K_o(\alpha)}{K_1(\alpha)} \operatorname{th}(\alpha - \alpha_o) \right. \\ \left. - \frac{1}{5} \frac{V_o^2}{V_T^2} \left[3 - \alpha \frac{K_2(\alpha) + 3K_o(\alpha)}{K_1(\alpha)} + \frac{4 K_1(\alpha) - 3K_o(\alpha)}{K_1(\alpha)} \operatorname{th}(\alpha - \alpha_o) \right] \right\} \quad (53) \end{aligned}$$

et la partie linéaire $\langle J_x \rangle^{(1)}$ a été trouvée égale à :

$$\langle J_x \rangle^{(1)} = \frac{2}{3} \frac{n m D^{(o)}}{\pi^{3/2} \hbar^2} \frac{\alpha_o}{\operatorname{sh} \alpha_o} \frac{K_1(\alpha_o)}{V_{T_o}} \frac{E}{B^2} \quad (54)$$

Cette expression de $\langle J_x \rangle^{(1)}$ n'est pas nouvelle et a déjà été obtenue dans la référence (13). Les fonctions $K_n(x)$ qui interviennent dans (53) et (54) sont les fonctions de Bessel modifiées de seconde espèce introduites dans l'annexe 5 et tabulées pour $0,1 < x < 5$ dans la référence (14).

A partir de (53), nous pouvons déduire la valeur de $\langle J_x \rangle^{(3)}$ dans le cadre de la première théorie. Il suffit de faire $T = T_o$ (c.a.d. $\alpha = \alpha_o$ et $V_T = V_{T_o}$) :

$$\langle J_x(T_o) \rangle^{(3)} = - \frac{1}{5} \frac{V_o^2}{V_{T_o}^2} \left[3 - \alpha_o \frac{K_2(\alpha_o) + 3K_o(\alpha_o)}{K_1(\alpha_o)} \right] \langle J_x \rangle^{(1)} \quad (55)$$

Pour exprimer le coefficient β_I caractérisant les faibles déviations par rapport à la loi d'Ohm dans le cadre de la première théorie, nous faisons usage de la relation :

$$\frac{2n}{x} K_n(x) = K_{n+1}(x) - K_{n-1}(x) \quad (56)$$

Ceci conduit à :

$$\beta_I = \frac{1}{5B^2} \frac{1}{V_{T_o}^2} \frac{9K_o(\alpha_o) - K_2(\alpha_o)}{K_2(\alpha_o) - K_o(\alpha_o)} = \frac{1}{5B^2} \frac{m}{\hbar \omega_q} \alpha_o \frac{9K_o(\alpha_o) - K_2(\alpha_o)}{K_2(\alpha_o) - K_o(\alpha_o)} \quad (57)$$

La particularité essentielle de β_I considérée comme une fonction de α_o - c.a.d. de T_o - est de s'annuler en changeant de signe pour la valeur $\alpha_o \approx 0,45$; $\beta_I > 0$ pour $\alpha_o < 0,45$. La figure 2 représente les variations avec α_o des rapports :

$$y_1 = \frac{9K_o - K_2}{K_2 - K_o} \quad \text{et} \quad y_2 = \alpha_o \frac{9K_2 - K_o}{K_2 - K_o} \quad (58)$$

donnant respectivement le facteur multiplicatif de $\frac{V_o^2}{V_T^2}$ dans $\langle J_x \rangle^{(3)}$ et les variations de β_I avec la température.

V - DETERMINATION DE LA TEMPERATURE ELECTRONIQUE DANS LE CAS DE L'INTERACTION ELECTRONS-PHONONS OPTIQUES. EXPRESSION FINALE DE $\langle J_x \rangle$ DANS LA SECONDE THEORIE

Le point de départ est la formule (35) dans laquelle ω_q est supposé indépendant de q . La méthode de calcul est identique à celle du §IV. Nous obtenons à l'ordre le plus bas par rapport au paramètre V_o/V_T la relation suivante entre α et α_o (c.a.d. entre T et T_o) :

$$\text{th}(\alpha - \alpha_o) = \frac{2}{3} \frac{V_o^2}{V_T^2} \frac{\alpha K_o(\alpha) - K_1(\alpha)}{K_o(\alpha) - \frac{1}{3} \frac{V_o^2}{V_T^2} (3K_o(\alpha) - 2\alpha K_1(\alpha))} \quad (59)$$

Il est facile de vérifier que le terme en $\frac{V_o^2}{V_T^2}$ au dénominateur du second membre de (59) est, en général, négligeable quand $\frac{V_o}{V_T} \ll 1$. Pour la même raison, $\text{th}(\alpha - \alpha_o)$ est une quantité très petite qui peut être remplacée par $\alpha - \alpha_o$. Enfin, en travaillant à l'ordre le plus bas en $\frac{V_o}{V_T}$, on peut remplacer α par α_o au second membre de (59). Finalement :

$$\frac{\alpha_o}{\alpha} - 1 = \frac{T}{T_o} - 1 = \frac{2}{3} \frac{V_o^2}{V_{T_o}^2} \frac{K_1(\alpha_o) - \alpha_o K_o(\alpha_o)}{\alpha_o K_o(\alpha_o)} \quad (60a)$$

Soit encore, en utilisant (56) :

$$\boxed{\frac{T}{T_0} - 1 = - \frac{V_0^2}{V_{T_0}^2} \left(1 - \frac{K_2(\alpha_0)}{3K_0(\alpha_0)} \right)} \quad (60b)$$

Les variations du facteur

$$y_3 = 1 - \frac{K_2(\alpha_0)}{3K_0(\alpha_0)} \quad (61)$$

en fonction de α_0 sont représentées sur la figure 3. On en déduit que la température électronique peut être supérieure ou inférieure à celle des phonons optiques et l'égalité $T = T_0$ se produit quand $\alpha_0 = \frac{\hbar\omega}{2kT_0} \approx 1,32$. Dans la gamme des températures ayant une réalité physique, le facteur $1 - \frac{K_2}{3K_0}$ ne prend jamais de valeurs suffisamment fortes pour faire différer fortement T de T_0 .

Pour obtenir $\langle J_x \rangle$, il reste à reporter cette valeur de T dans la formule (53), en éliminant tous les termes d'ordre supérieur à $V_0^2/V_{T_0}^2$. Dans ce dernier calcul, il nous faut développer $K_1(\alpha)$ au voisinage de α_0 :

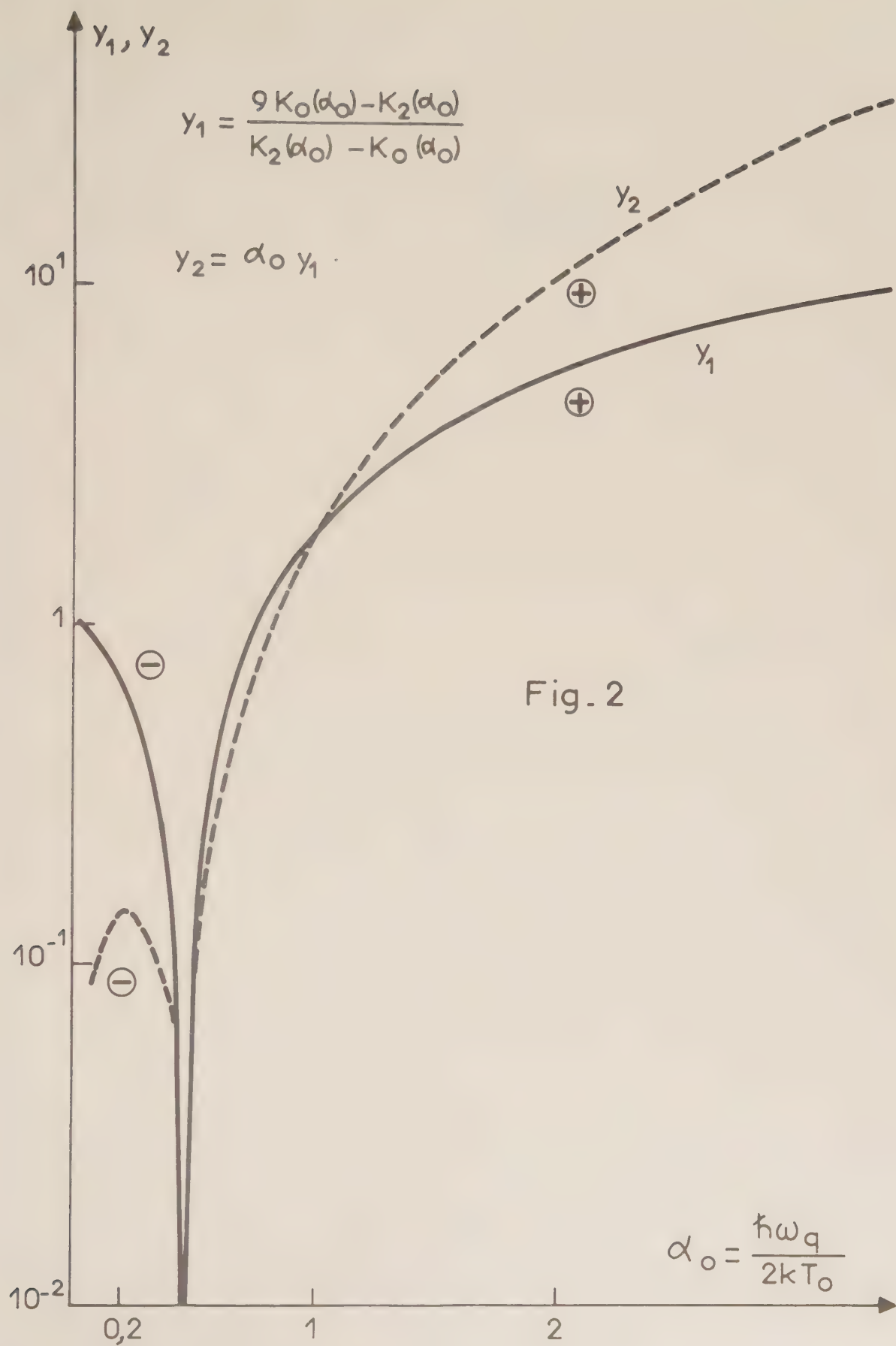
$$K_1(\alpha) \approx K_1(\alpha_0) + (\alpha - \alpha_0) \left(\frac{dK_1(\alpha)}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} \quad (62)$$

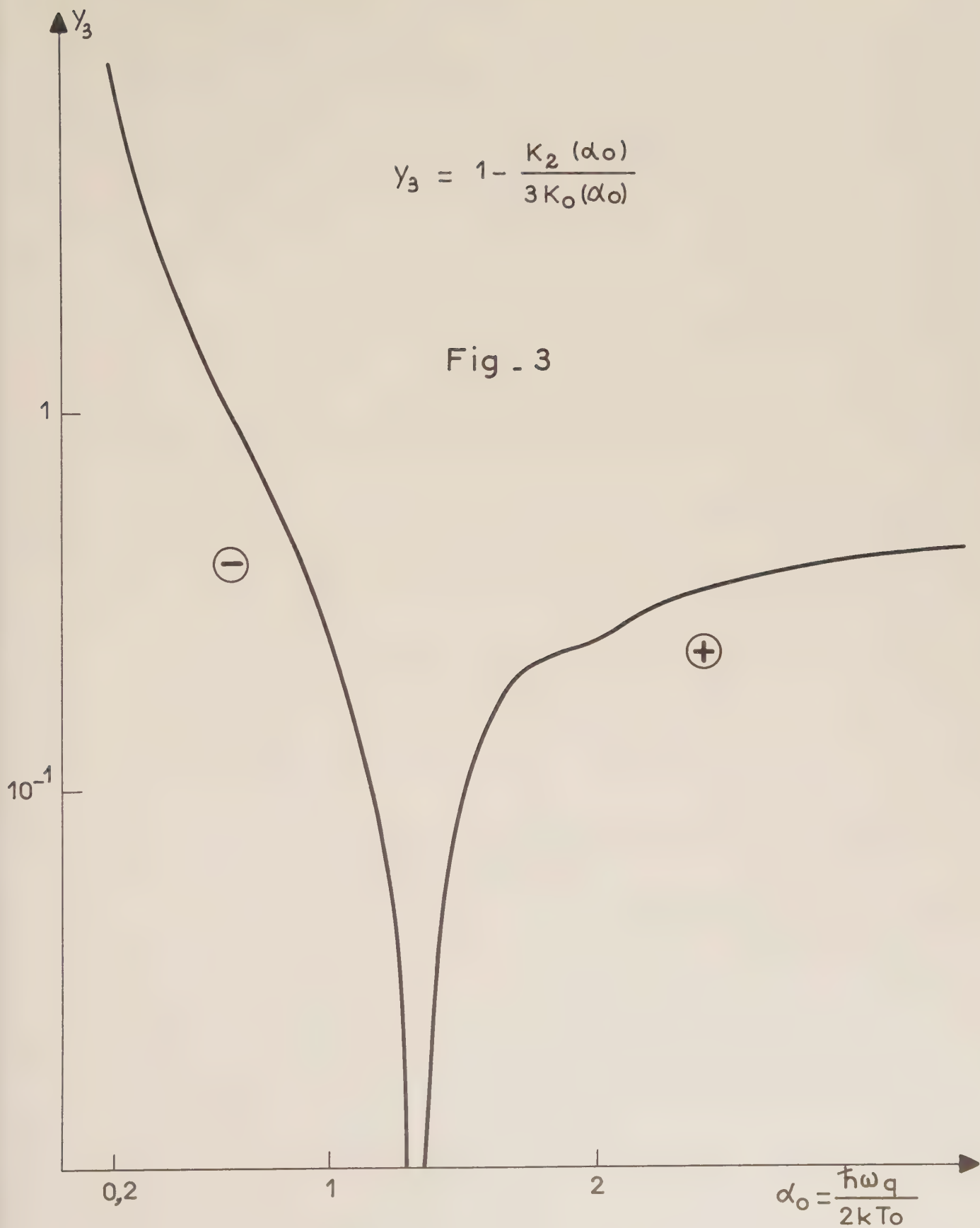
$$\text{or, comme } \alpha \frac{dK_n(\alpha)}{d\alpha} = -n K_n(\alpha) - \alpha K_{n-1}(\alpha) \quad (63)$$

on trouve :

$$\frac{K_1(\alpha)}{K_1(\alpha_0)} = 1 + \frac{2}{3} \frac{V_0^2}{V_{T_0}^2} \frac{K_1(\alpha_0) - \alpha_0 K_0(\alpha_0)}{\alpha_0 K_0(\alpha_0)} \frac{K_1(\alpha_0) + \alpha_0 K_0(\alpha_0)}{K_1(\alpha_0)} \quad (64)$$

Finalement, après quelques manipulations et l'utilisation de (56), nous obtenons :





$$\langle J_x \rangle = \langle J_x \rangle^{(1)} \left[1 - \frac{1}{30} \frac{V_o^2}{V_T^2} \frac{\left[5 \frac{K_2(\alpha_o)}{K_o(\alpha_o)} - 9 \right] \left[\frac{K_2(\alpha_o)}{K_o(\alpha_o)} - 9 \right]}{\frac{K_2(\alpha_o)}{K_o(\alpha_o)} - 1} \right] \quad (65)$$

Le coefficient β_{II} caractérisant les déviations par rapport à la loi d'Ohm dans le cadre de la seconde théorie est donc égal à :

$$\beta_{II} = - \frac{1}{30} \frac{m}{B^2 \mu_{\omega q}} \alpha_o \frac{(5\eta(\alpha_o) - 9) (\eta(\alpha_o) - 9)}{\eta(\alpha_o) - 1} \quad (66)$$

Nous avons introduit dans (66) la fonction $\eta(\alpha_o)$ définie par le rapport :

$$\eta(\alpha_o) = \frac{K_2(\alpha_o)}{K_o(\alpha_o)}$$

qui est une fonction monotone décroissant de $+\infty$ à 1 quand α_o croît.

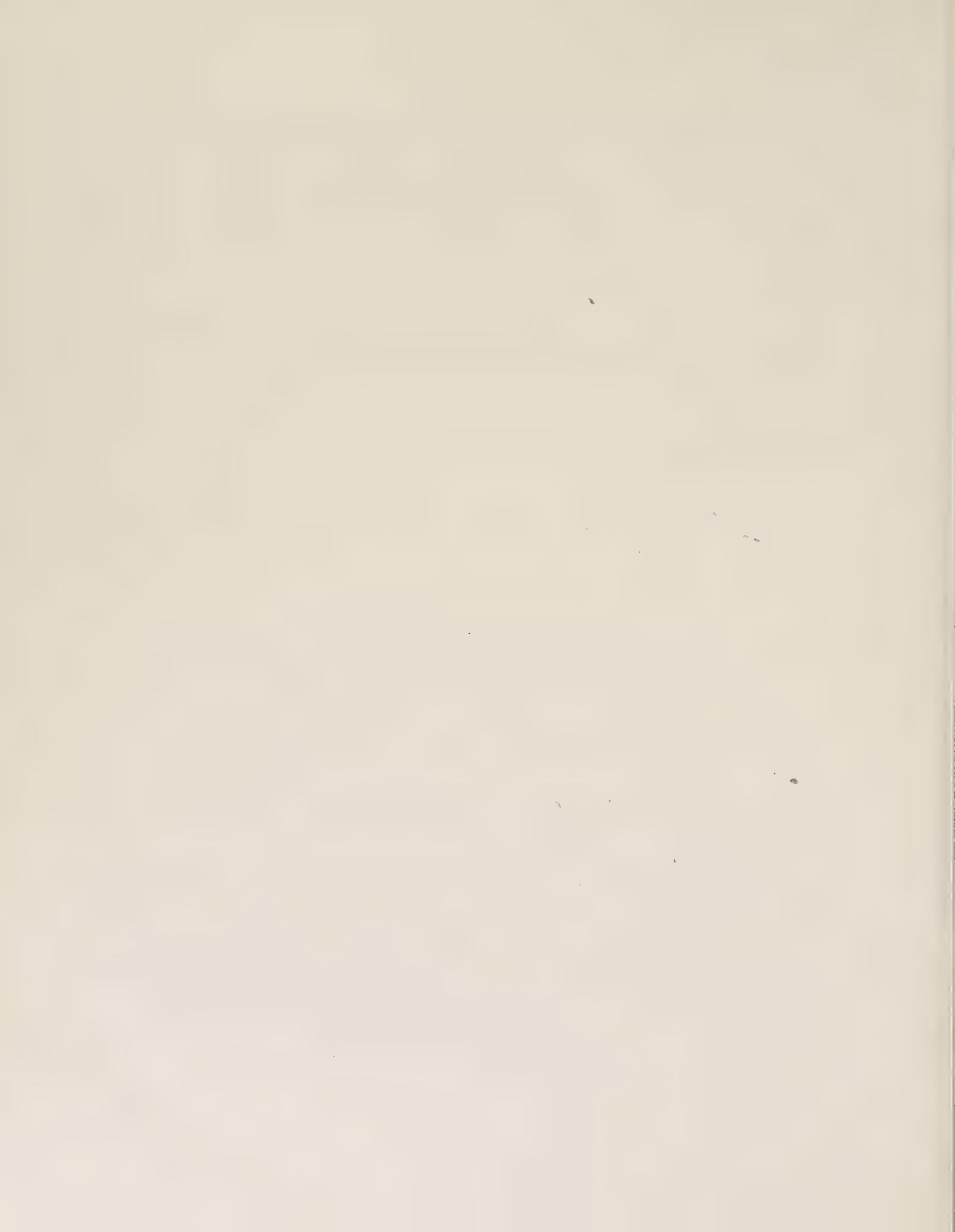
La figure 4 schématise les variations des rapports :

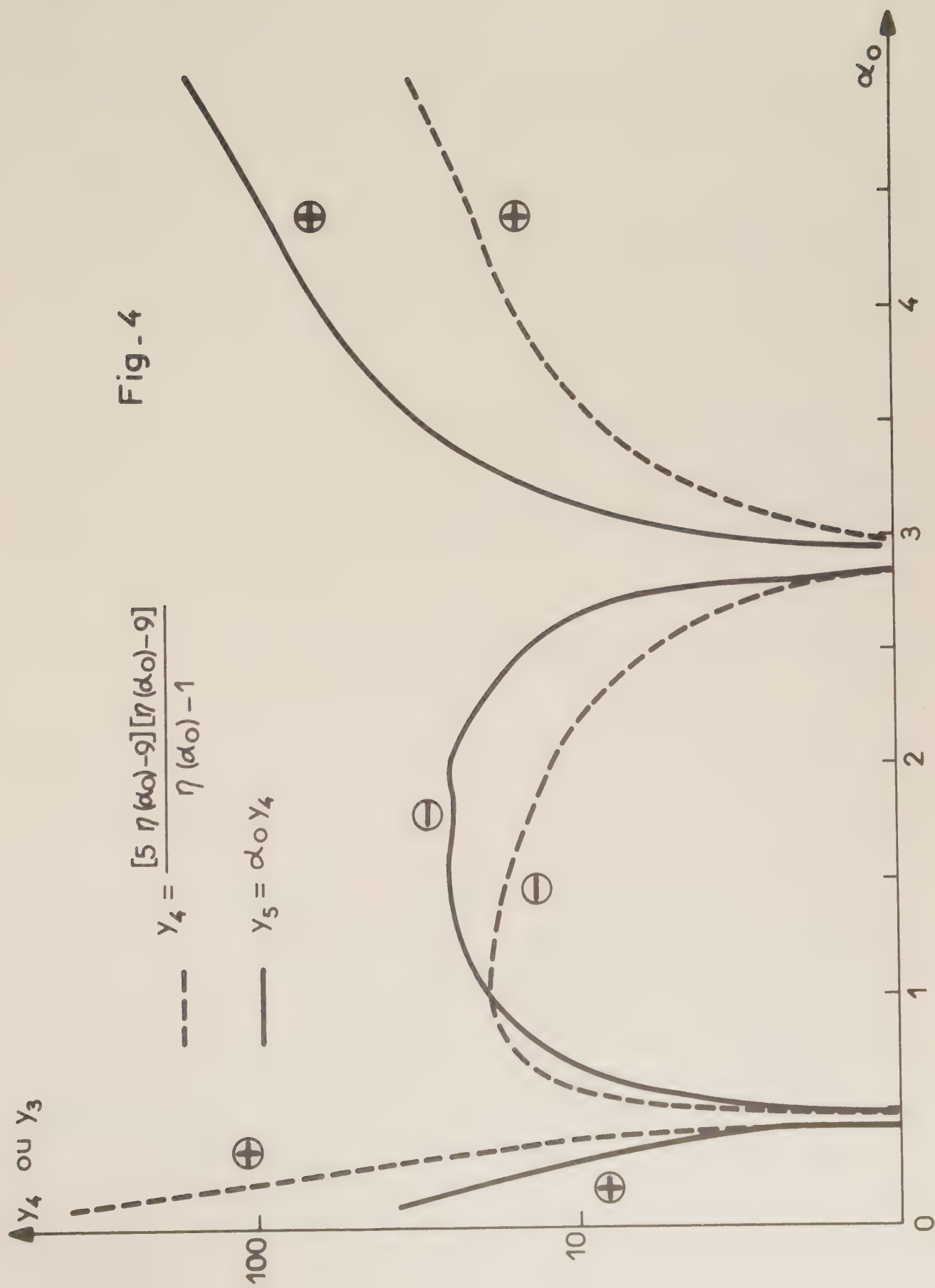
$$y_4 = \frac{(5\eta(\alpha_o) - 9) (\eta(\alpha_o) - 9)}{\eta(\alpha_o) - 1} \quad \text{et} \quad y_5 = \alpha_o y_4$$

qui donnent respectivement le facteur multiplicatif de $\frac{V_o^2}{V_T^2}$ dans $\langle J_x \rangle^{(3)}$ et les variations de β_{II} avec la température.

Le point essentiel est que - comme $\beta_I - \beta_{II}$ s'annule quand α_o varie ; mais il s'annule deux fois. Plus précisément, β_{II} s'annule une première fois pour la même valeur de $\alpha_o \approx 0,45$ que β_I et une seconde fois pour une valeur de α_o supérieure, de l'ordre de 2,86. Le signe de β_{II} est positif quand α_o est compris entre 0,45 et 2,86 ; il est négatif au dehors.

En anticipant sur les résultats expérimentaux, nous pouvons dire que ce comportement de β_{II} contribuera à interpréter les déviations par rapport à la loi d'Ohm dans InSb.





CHAPITRE 5

LES DEVIATIONS PAR RAPPORT A LA LOI D'OHM. II-LIMITE QUANTIQUE

Le plan adopté dans ce chapitre est le même que dans le précédent ; les techniques de calcul y sont très semblables et nous aurons tendance à passer rapidement sur les développements.

En-dehors de la condition $\omega_c \tau \gg 1$, la limite quantique requiert que :

$$\hbar\omega_c \gg kT \quad (1)$$

Nous ferons intervenir en plus, comme précédemment, une limitation sur la valeur de la vitesse d'entraînement V_0 qui précisera la gamme des champs électriques où les phénomènes d'électrons tièdes se produisent. Une complication par rapport à la limite classique apparaîtra, car nous serons obligé de scinder en deux parties l'intervalle de variation des inductions magnétiques selon que les paramètres sans dimension

$$a = \frac{1}{\gamma^2} \frac{kT}{\hbar\omega_c} = \frac{V_0^2}{s} \frac{kT}{4\hbar\omega_c} \quad \text{dans le cas du couplage avec les phonons acoustiques} \quad (2)$$

$$\text{ou } a' = \frac{\omega_q}{\omega_c} \quad \text{dans le cas du couplage avec les phonons optiques} \quad (3)$$

seront très supérieurs ou très inférieurs à l'unité.

I - EXPRESSION GENERALE DE $\langle J_x \rangle$ EN LIMITE QUANTIQUE ($\hbar\omega_c \gg kT$)

Il serait plus exact de parler dans ce chapitre d'extrême limite quantique car nous allons supposer que la valeur de l'induction magnétique est suffisamment élevée pour que tous les électrons se répartissent dans le niveau de Landau le plus bas et n'effectuent des transitions qu'entre les états de ce premier niveau dégénéré. Autrement dit, nous supposons que l'écart, $\hbar\omega_c$, entre deux niveaux de Landau est si grand que la probabilité de transition entre les niveaux $n = 0$ et $n' \geq 1$ est négligeable.

Nous devons toutefois porter notre attention sur deux aspects particuliers à limite quantique. Tout d'abord, il faut tenir compte du fait que la dégénérescence de spin est levée en présence d'une induction magnétique et que l'intervalle entre les énergies de deux électrons de spins opposés, se trouvant dans des états repérés par les mêmes indices quantiques (n, k_y, k_z), est précisément égal à $\hbar\omega_c$. Ensuite dans le cas des phonons optiques, nous invoquerons ultérieurement, dans l'étude d'un des cas limites, que la condition $\omega_q/\omega_c \gg 1$ est remplie. Cette inégalité risque de ne pas être toujours compatible avec l'hypothèse initiale selon laquelle les électrons n'effectuent des transitions qu'entre les états du niveau de Landau le plus bas. Néanmoins nous effectuerons les calculs dans le cadre de notre hypothèse primitive car ils sont alors relativement simples et doivent refléter une part importante de la réalité.

En tenant compte de l'ensemble de ces remarques, l'expression (4-7) de $\langle J_x \rangle$ s'écrit simplement :

$$\langle J_x \rangle = \sum_q \frac{\hbar q_y}{B} \left(N_q(T_0, \omega_q) - N_q(T, \omega_q^*) \right) S'(\vec{q}) \quad (4)$$

avec :

$$S'(\vec{q}) = \sum_{k_y, k_z} \sum_{k'_y, k'_z} \{ f(\epsilon_o(k_z)) - f(\epsilon_o(k'_z)) \} \frac{2\pi}{\hbar} |\tilde{\gamma}_{o, k_y; o, k'_y}(\vec{q})|^2 \times \\ \times \delta(\epsilon(k_z) - \epsilon_o(k'_z) + \hbar\omega_q^*) \quad (5)$$

En remontant à la définition (3.8) de $\tilde{\gamma}_{\alpha, \alpha'}$, on obtient :

$$|\tilde{\gamma}_{o, k_y; o, k'_y}(\vec{q})|^2 = |C(q)|^2 e^{\frac{\hbar}{2m\omega_c} (q_x^2 + q_y^2)} \delta_{k'_y, k_y + q_y} \delta_{k'_z, k_z + q_z} \quad (6)$$

Dans (5), les sommations sur k'_y et k'_z sont triviales du fait des $\delta_{k'_y, k_y + q_y}$ et $\delta_{k'_z, k_z + q_z}$; la sommation sur k_y est non moins triviale puisque rien ne dépend de k_y dans l'expression à sommer. Ensuite, la sommation sur k_z est transformée en une intégrale qui se calcule immédiatement grâce à

la distribution :

$$\delta(\varepsilon(k_z) - \varepsilon_0(k_z - q_z) + \hbar\omega_q^*) = \frac{m}{\hbar^2 |q_z|} \delta\left(k_z - \frac{q_z}{2} + \frac{m\omega_q^*}{\hbar q_z}\right) \quad (7)$$

Nous obtenons ainsi :

$$\langle J_x \rangle = \frac{em}{2\pi\hbar^3} \sum_q \frac{q_y}{|q_z|} |C(q)|^2 (N_q(T_0, \omega_q) - N_q(T, \omega_q^*)) (f(\varepsilon') - f(\varepsilon' + \hbar\omega_q^*)) \quad (8)$$

$$\text{avec : } \varepsilon' = -\frac{\hbar\omega_c}{2} + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{q_z}{2} - \frac{m\omega_q^*}{\hbar q_z} \right)^2 \quad (9)$$

Nous nous limitons à l'étude d'un gaz d'électrons non dégénéré pour lequel la condition $-\frac{\hbar\omega_c + \xi}{kT} \gg 1$ est supposée remplie. Nous pouvons alors remplacer la fonction de répartition de Fermi-Dirac par une fonction de Maxwell Boltzmann. En transformant la sommation sur q en une intégration, nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} \langle J_x \rangle = & \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \frac{n m^{1/2}}{\hbar(kT)^{1/2} B} \int_{q \leq q_{\max}} d^3q \frac{q_y}{q_z} |C(q)|^2 e^{-\frac{\hbar}{2m\omega_c}(q_x^2 + q_y^2)} \\ & e^{-\frac{\hbar^2}{2mkT} \left(\frac{q_z}{2} + \frac{m}{\hbar q_z} \right)^2} \frac{e^{\frac{\hbar\omega_q^*}{kT}} - e^{\frac{\hbar\omega_q}{kT_0}}}{e^{\frac{\hbar\omega_q}{kT_0}} - 1} \end{aligned} \quad (10)$$

Pour aboutir à (10), nous avons utilisé la relation de normalisation (4.4) qui dans le cas de la limite quantique, quand le gaz d'électrons est non dégénéré, se réduit à :

$$n = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{(mkT)^{1/2}}{\hbar^2} e B \exp \frac{\xi + \hbar\omega_c/2}{kT} \quad (11)$$

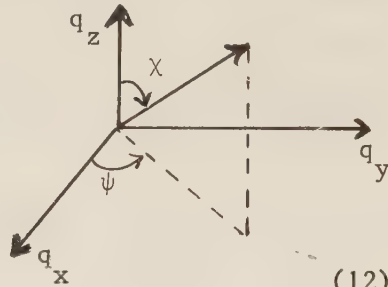
Il reste maintenant à évaluer l'intégrale qui figure dans (10) pour les trois valeurs de $|C(q)|^2$ correspondant aux trois couplages que nous avons déjà analysés en limite classique.

II - CALCUL DE $\langle J_x \rangle$ DANS LE CAS DE L'INTERACTION ELECTRONS-PHONONS ACOUSTIQUES

Nous reprenons les données (4.18) à (4.21) valables pour les phonons acoustiques et nous poursuivons le calcul de $\langle J_x \rangle$ en passant en coordonnées sphériques ; les angles polaires χ et ψ sont choisis selon le schéma ci-contre qui est différent de celui du §4.II.

Nous procédons alors au changement de variables :

$$\left(\frac{m V_o^2}{2kT} \right)^{1/2} \sin \psi = u' \quad \text{et} \quad \frac{\hbar s q}{kT} = t \quad (12)$$



et nous réintroduisons la température de Debye θ et les paramètres γ et γ_o .

Après quelques développements, nous aboutissons, pour les deux types de couplages, par potentiel de déformation et piézoélectrique, à :

$$J_x = \frac{2n m^{1/2} D(p)}{(2\pi)^{5/2} (kT)^{1/2} \hbar B} \left(\frac{kT}{\hbar s} \right)^{p+1} \frac{V_o^2}{V_o^2} \int_0^{\theta/T} dt \int_0^\pi d\chi \frac{\sin^2 \chi}{|\cos \chi|} t^p$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{\gamma^2} \frac{kT}{4\hbar\omega_c} t^2 \sin^2 \chi} \frac{V_o}{V_T}}{e^{\frac{T}{T_o} - 1}} \int_{-\frac{V_o}{V_T}}^{\frac{V_o}{V_T}} du' \frac{u'}{\sqrt{1 - \frac{V_o^2}{V_o^2} u'^2}}$$

$$\left(\exp - \left(\frac{t \cos \chi}{4\gamma} - \frac{\gamma}{\cos \chi} - u' \operatorname{tg} \chi \right)^2 \right. \\ \left. - e^{\frac{T}{T_o}} \exp - \left(\frac{t \cos \chi}{4\gamma} + \frac{\gamma}{\cos \chi} + u' \operatorname{tg} \chi \right)^2 \right) \quad (13)$$

avec, comme au chapitre 4 : $p = 3$ dans le cas du P.D.

et $p = 1$ dans le cas du C.P.

Nous introduisons ici la seconde approximation de ce calcul en limite quantique, en imposant la limitation habituelle sur l'intensité du champ électrique :

$$\boxed{\frac{V_0}{V_T} \ll 1} \quad (14)$$

Ceci nous permet d'évaluer l'intégrale en u' , intervenant dans (13), sous forme d'un développement en puissance de V_0/V_T . La suite des calculs est exposée dans l'annexe 6 dont nous extrayons les résultats intéressants suivants.

Pour obtenir des expressions algébriques simples de $\langle J_x(T_0, T) \rangle$, nous nous limitons à l'étude de deux cas extrêmes que nous distinguons à l'aide du paramètre

$$a^2 = \frac{1}{\gamma^2} \frac{kT}{4\hbar\omega_c} = \frac{V_T^2}{s^2} \frac{kT}{4\hbar\omega_c} \quad (15)$$

auquel est automatiquement associé le paramètre $a_o^2 = \frac{1}{\gamma_o^2} \frac{kT_o}{4\hbar\omega_c}$

Notons que du fait de la condition $\hbar\omega_c \gg kT$, l'inégalité

$$a_{\gamma}^2 \ll 1 \quad (16)$$

est toujours vérifiée. Les deux cas extrêmes sont caractérisés respectivement par les deux possibilités : $a^2 \gg 1$ ou $a^2 \ll 1$.

1° Etude du premier cas : $a^2 \gg 1$ (ou $a_o^2 \gg 1$)

D'après la définition (15) de a^2 , on constate que la condition $a^2 \gg 1$ ne sera réalisée que si $\gamma^2 \ll 1$. Ce premier cas se rencontrera donc aux températures relativement élevées (de façon que $V_T \gg s$) et pour des inductions magnétiques juste suffisantes pour atteindre la limite quantique (de façon que $\frac{kT}{4\hbar\omega_c}$ ne soit pas trop petit).

Nous montrons dans l'annexe 6 qu'en négligeant des termes introduisant

des corrections de l'ordre de (ou inférieures à) γ^2 , a^{-2} ou $a^2\gamma^2$, les expressions de la densité de courant pour les deux types de couplage étudiés se réduisent à :

- Pour le couplage par potentiel de déformation :

$$\langle J_x(T_o, T) \rangle = \langle J_x \rangle^{(1)} \left(\frac{T_o}{T} \right)^{3/2} \left[1 + \frac{\text{Log } T/T_o}{\text{Log } \frac{4a_o}{(ec)^{1/2}}} \right] \cdot \left[1 + \frac{3}{8} \frac{V_o^2}{s^2} \frac{1}{\text{Log } \frac{4a}{(ec)^{1/2}}} - \left(1 - \frac{T}{T_o} \right) \frac{1 - \frac{1}{4} \frac{V_o^2}{s^2}}{\text{Log } \frac{4a}{(ec)^{1/2}}} \right] \quad (17)$$

avec :

$$\langle J_x \rangle^{(1)} = \frac{e^{-2} n m^{1/2} D^{(3)}}{\sqrt{2} \pi^{3/2} \hbar^3 s (kT_o)^{1/2}} \text{Log } \frac{4a_o}{(ec)^{1/2}} E \quad (18)$$

- Pour le couplage piézoélectrique :

$$\langle J_x(T_o, T) \rangle = \langle J_x \rangle^{(1)} \left(\frac{T_o}{T} \right)^{3/2} \left[1 + \frac{\text{Log } T/T_o}{\text{Log } \frac{4a_o}{c^{1/2}}} \right] \cdot \left[1 + \frac{3}{8} \frac{V_o^2}{s^2} \frac{1}{\text{Log } \frac{4a}{c^{1/2}}} - \left(1 - \frac{T}{T_o} \right) \frac{1 - \frac{1}{4} \frac{V_o^2}{s^2}}{\text{Log } \frac{4a}{c^{1/2}}} \right] \quad (19)$$

$$\text{avec : } \langle J_x \rangle^{(1)} = \frac{\bar{e} n m^{1/2} D^{(1)}}{(2\pi)^{3/2} \hbar^2 s (kT_o)^{1/2} B} \text{Log} \frac{4a_o}{c^{1/2}} E \quad (20)$$

(La grandeur C est telle que $\text{Log } C = \text{constante d'Euler}$)

Un certain nombre de remarques découlent des formules (17) à (20).

- Primo, en ce qui concerne la composante linéaire $\langle J_x \rangle^{(1)}$, les résultats (18) et (20) sont connus (cf. référence (1) par exemple). Ils font tous les deux intervenir $\text{Log } a_o$ que l'on peut décomposer d'après (15) en :

$$\text{Log } a_o = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1}{\gamma_o} + \frac{1}{2} \text{Log} \frac{kT_o}{4\hbar\omega_c} \quad (21)$$

Et comme $\frac{1}{\gamma_o} \gg \left(\frac{kT_o}{4\hbar\omega_c} \right)^{-1}$ quand $a_o^2 \gg 1$, on peut négliger les variations avec B du second terme au deuxième membre de (21). Grâce à cette remarque, on peut faire apparaître simplement les dépendances de $\langle J_x \rangle^{(1)}$ avec la température et l'induction magnétique :

$$\langle J_x \rangle^{(1)} \sim \begin{cases} T_o^{-1/2} B^0 & \text{dans le cas du P.D.} \\ T_o^{-1/2} B^{-1} & \text{dans le cas du C.P.} \end{cases} \quad (22)$$

- Secundo, en ce qui concerne les phénomènes d'électrons tièdes dans le cadre de la première théorie, il suffit de faire $T = T_o$ dans (17) et (19) pour obtenir $\langle J_x(T_o) \rangle^{(3)}$. En passant directement au coefficient β_I caractérisant les déviations par rapport à la loi d'Ohm, nous obtenons :

$$\beta_I = \begin{cases} \frac{3}{8} \frac{1}{B^2 s^2} \frac{1}{\text{Log} \frac{4a_o}{(ec)^{1/2}}} & \text{pour le P.D.} \\ \frac{3}{8} \frac{1}{B^2 s^2} \frac{1}{\text{Log} \frac{4a_o}{c^{1/2}}} & \text{pour le C.P.} \end{cases} \quad \begin{matrix} (23a) \\ (23b) \end{matrix}$$

La remarque déduite de (21) et faite pour les phénomènes linéaires s'applique ici : les coefficients β_I , pour les deux types de couplage avec les phonons acoustiques, sont très voisins l'un de l'autre, varient pratiquement en B^{-2} avec l'induction magnétique et sont peu sensibles aux modifications de la température.

Nous passons maintenant à l'étude du second cas limite.

2° Etude du deuxième cas $a^2 \ll 1$ (ou $a_0^2 \ll 1$)

Les calculs de l'annexe 6 ont été faits avec la condition γ^2 (ou γ_0^2) $\ll 1$; cette inégalité est encore vérifiée à des températures aussi basses que $T = 1^\circ\text{K}$ quand la masse effective des électrons est très faible (ex : $\gamma_0^2 \approx 10^{-2}$ à 1°K dans InSb). En conséquence, pour que $a^2 \ll 1$, il faut compenser l'importance du facteur γ^{-2} par la faiblesse du facteur $\frac{kT}{4\hbar\omega_c}$; ce second cas se présentera donc à basse température et aux fortes inductions magnétiques. (Il faut noter qu'à basse température, la condition de non dégénérescence du gaz électronique peut être remise en question.)

D'après l'annexe 6, en négligeant devant 1 des termes de l'ordre de (ou inférieurs) à γ^2 et à l'ordre le plus bas par rapport au champ électrique, nous montrons que :

$$\begin{aligned} \langle J_x(T_0, T) \rangle = & \frac{n m^{1/2} D^{(p)}}{(2\pi)^{3/2} \hbar(kT)^{1/2} B_s^2} \left(\frac{kT}{\hbar s} \right)^{(p+1)} E \left\{ \int_0^{\theta/T_0} dt t^{p+1} e^{-a^2 t^2} \frac{e^{t/2}}{e^t - 1} K_0 \left(\frac{t}{2} \right) \right. \\ & + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) \int_0^{\theta/T_0} dt t^{p+2} e^{-a^2 t^2} \frac{e^{t/2}}{e^t - 1} \left[K_0 \left(\frac{t}{2} \right) \frac{e^t + 1}{e^t - 1} - K_1 \left(\frac{t}{2} \right) \right] \\ & \left. - \frac{1}{32} \frac{V_0^2}{s^2} \int_0^{\theta/T_0} dt t^{p+2} e^{-a^2 t^2} \frac{e^{t/2}}{e^t - 1} \left[3K_1 \left(\frac{t}{2} \right) - \frac{t}{2} K_0 \left(\frac{t}{2} \right) - \frac{3t}{2} K_2 \left(\frac{t}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

Ce résultat n'est pas simple ; on peut toutefois en tirer les conclusions

suivantes :

- Primo : la composante de $\langle J_x \rangle$ linéaire en E s'obtient en faisant $T = T_0$ et en négligeant les termes d'ordre supérieur à E dans (24).

$$\langle J_x \rangle^{(1)} = \frac{n m^{1/2} D(p)}{(2\pi)^{3/2} (\hbar s)^{3/2} B^2} \left(\frac{kT_0}{\hbar s} \right)^{p+1/2} E \int_0^{\theta/T_0} dt t^{p+1} e^{-a_0^2 t^2} \frac{e^{t/2}}{e^t - 1} K_0 \left(\frac{t}{2} \right) \quad (25)$$

Dans la mesure où $a_0^2 \ll 1$, et en suivant les directives de l'annexe 6, $\langle J_x \rangle^{(1)}$ peut se simplifier en :

$$\langle J_x \rangle^{(1)} \approx \frac{n m^{1/2} D(p)}{\pi 2^{3/2} (\hbar s)^{3/2} B^2} \left(\frac{kT_0}{\hbar s} \right)^{p+1/2} \left[J_{p+3/2} \left(\frac{\theta}{T_0} \right) - a_0^2 J_{p+5/2} \left(\frac{\theta}{T_0} \right) \right] E \quad (26)$$

à condition d'introduire les fonctions :

$$J_\nu \left(\frac{\theta}{T_0} \right) = \int_0^{\theta/T_0} dt \frac{t^\nu}{e^t - 1} \quad (27)$$

Si T_0 est très faible par rapport à θ , les fonctions $J_\nu \left(\frac{\theta}{T_0} \right)$ ne dépendent pratiquement pas de T_0 et par conséquent :

$$\langle J_x \rangle^{(1)} \sim \begin{cases} B^{-2} T_0^{7/2} & \text{dans le P.D.} \\ B^{-2} T_0^{3/2} & \text{dans le C.P.} \end{cases} \quad (28)$$

- Secundo : l'expression de $\langle J_x(T_0) \rangle^{(3)}$ dans le cadre de la première théorie s'obtient en faisant $T = T_0$ dans (24). En utilisant la définition (27), le coefficient β_I caractérisant les déviations par rapport à la loi d'Ohm s'écrit :

$$\beta_I = - \frac{1}{32} \frac{1}{B^2 s^2} \frac{\left[3 J_{p+3/2} \left(\frac{\theta}{T_0} \right) - 2 J_{p+5/2} \left(\frac{\theta}{T_0} \right) \right] - a_0^2 \left[3 J_{p+9/2} \left(\frac{\theta}{T_0} \right) - 2 J_{p+11/2} \left(\frac{\theta}{T_0} \right) \right]}{J_{p+1/2} \left(\frac{\theta}{T_0} \right) - a_0^2 J_{p+5/2} \left(\frac{\theta}{T_0} \right)} \quad (29)$$

Dans la mesure où $\frac{\theta}{T} \gg 1$, le coefficient β_I est pratiquement indépendant de la température et varie en B^{-2} avec l'induction magnétique.

Pour obtenir le coefficient β_{II} de la seconde théorie, il nous faut maintenant déterminer la température électronique.

III - DETERMINATION DE LA TEMPERATURE ELECTRONIQUE DANS LE CAS DE L'INTERACTION ELECTRONS-PHONONS ACOUSTIQUES. EXPRESSION FINALE DE $\langle J_x \rangle$ DANS LA SECONDE THEORIE

Il nous faut maintenant développer l'égalité $\langle J_x \rangle E = P$ en limite quantique. Pour cela, on peut partir de (4.35) où $S(\vec{q})$ a été remplacé par $\tilde{S}(\vec{q})$ défini par (5.5). Le travail fait au §I de ce chapitre se transpose alors sans grande modification et conduit à :

$$\int_{q \leq q_{\max}} d^3q \frac{\omega_q}{|q_z|} |C(q)|^2 e^{-\frac{\hbar}{2m\omega_c}(q_x^2 + q_y^2)} e^{-\frac{\hbar^2}{2mkT}\left(\frac{q_z}{2} + \frac{m\omega_c}{\hbar q_z}\right)^2} \frac{e^{\frac{\hbar\omega_q}{kT}} - e^{\frac{\hbar\omega_{c,q}}{kT_0}}}{e^{\frac{\hbar\omega_q}{kT_0}} - 1} = 0 \quad (30)$$

Toutes les techniques utilisées au §II pour le calcul de $\langle J_x \rangle$ sont à nouveau mises en oeuvre. Aucune difficulté nouvelle n'apparaît dans les développements, c'est pourquoi nous donnons simplement les résultats sans présenter les calculs.

1° Etude du premier cas $a^2 \gg 1$ (T élevé, B faible)

La température électronique T est liée à T_0 et E, dans le cas où l'on s'intéresse aux petites déviations par rapport à la loi d'Ohm, par les formules :

$$\frac{T}{T_0} - 1 = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{s^2} \frac{\text{Log } 4 a_0 / e^{3/2} c^{1/2}}{\text{Log } 4 a_0 / b_0 (ec)^{1/2}} & \text{pour le P.D.} \\ \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{s^2} \frac{\text{Log } 4 a_0 / ec^{1/2}}{\text{Log } 4 a_0 / c^{1/2}} & \text{pour le C.P.} \end{cases} \quad \begin{matrix} (31a) \\ (31b) \end{matrix}$$

où b_0 a été défini dans l'annexe 6 par : $b_0^2 = 1 - 4 kT_0 / \hbar\omega_c$ (32)

- Tout d'abord, on constate que T varie très peu avec T_0 et qu'en première approximation, du fait que $a_0^2 \gg 1$,

$$\frac{T}{T_0} - 1 \approx \frac{V_0^2}{2s^2} \quad (33)$$

pour les deux types de couplage.

- Ensuite, en reportant la valeur de $\frac{T}{T_0}$ dans les formules (17) et (19), on en déduit les expressions de β_{II} valables dans la seconde théorie et dans la mesure où la condition $\frac{V_0^2}{s^2} \ll 1$ est remplie.

Pour le couplage par potentiel de déformation :

$$\beta_{II} = - \frac{1}{B^2 s^2} \left[\frac{3}{4} \frac{\text{Log } 4a_0/e^{3/2} c^{1/2}}{\text{Log } 4a_0/b_0 e^{1/2} c^{1/2}} - \frac{4}{3} \frac{1}{\text{Log } \frac{4a_0}{(ec)^{1/2}}} \left(\frac{3}{8} + \frac{\text{Log } 4a_0/e^{3/2} c^{1/2}}{\text{Log } 4a_0/b_0 e^{1/2} c^{1/2}} \right) \right] \quad (34)$$

et pour le couplage piézoélectrique :

$$\beta_{II} = - \frac{1}{B^2 s^2} \left[\frac{3}{4} \frac{\text{Log } 4a_0/ec^{1/2}}{\text{Log } 4a_0/c^{1/2}} - \frac{4}{3} \frac{4a_0}{\text{Log } \frac{4a_0}{c^{1/2}}} \left(\frac{3}{8} + \frac{\text{Log } 4a_0/ec^{1/2}}{\text{Log } 4a_0/c^{1/2}} \right) \right] \quad (35)$$

Du fait que $a_0^2 \gg 1$, pour les deux types de couplage β_{II} est très voisin de

$$\beta_{II} \approx - \frac{3}{4} \frac{1}{B^2 s^2} \quad (36)$$

En comparant β_I donné par (23) et β_{II} , on constate que tous les deux varient en B^{-2} et dépendent peu de la température. Mais β_{II} est toujours négatif alors que β_I est toujours positif et $\beta_I < |\beta_{II}|$

2° Etude du second cas $a^2 \ll 1$ (T faible, B élevé)

En opérant à partir de (30) comme nous l'avons fait pour $\langle J_x \rangle$, nous obtenons :

$$\frac{T}{T_0} - 1 = \frac{V_0^2}{2s^2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\int_0^{\theta/T_0} dt t^{p+2} \frac{e^{t/2}}{e^t - 1} e^{-a_0^2 t^2} K_1 \left(\frac{t}{2} \right)}{\int_0^{\theta/T_0} dt t^{p+1} \frac{e^{t/2}}{e^t - 1} e^{-a_0^2 t^2} K_0 \left(\frac{t}{2} \right)} \right] \quad (37)$$

Ici encore, si $\frac{\theta}{T_0} \gg 1$, le rapport $\frac{T}{T_0}$ varie très peu avec T_0 . Il faut reporter ce résultat dans l'expression (24) de $\langle J_x(T_0, T) \rangle$. La formule finale est excessivement compliquée et nous avons préféré ne pas l'écrire car elle ne nous apportera rien d'essentiel. Notons simplement que β_{II} est peu sensible aux variations de température et suit une loi en B^{-2} quand l'induction magnétique varie.

IV - CALCUL DE $\langle J_x \rangle$ DANS LE CAS DE L'INTERACTION ELECTRONS-PHONONS OPTIQUES

Nous reprenons nos calculs à partir de la formule (10) que nous allons transformer en tenant compte que pour les phonons optiques (cf. (4.46) à (4.48)) :

$$\omega_q = c^{\text{te}} \quad \text{et} \quad |c(q)|^2 = D^{(o)} q^{-2}$$

Ainsi :

$$\langle J_x \rangle = \frac{n m^{1/2} D^{(o)}}{2(2\pi)^{5/2} \hbar(kT)^{1/2} B} \frac{e^{-\frac{\hbar\omega_q}{2kT_0}}}{\text{sh} \frac{\hbar\omega_q}{2kT_0}} \int_{q \leq q_{\text{max}}} d^3q \frac{q_y}{|q_z| q^2} e^{-\frac{\hbar}{2m\omega_c} (q_x^2 + q_y^2)} \left(\exp - \frac{\hbar^2}{2mkT} \left(\frac{q_z}{2} - \frac{m\omega_q^*}{\hbar q_z} \right)^2 - e^{\frac{\hbar\omega_q}{kT_0}} \exp - \frac{\hbar^2}{2mkT} \left(\frac{q_z}{2} + \frac{m\omega_q^*}{\hbar q_z} \right)^2 \right) \quad (38)$$

Pour évaluer l'intégrale en q de (38)

1° nous passons en coordonnées cylindriques ;

2° nous effectuons le changement de variables :

$$q_z = \left(\frac{2m\omega_q}{\hbar} \right)^{1/2} x^{1/2} \quad (39)$$

$$q_x^2 + q_y^2 = \left(\frac{2m\omega_c}{\hbar} \right)^{1/2} t^{1/2} \quad (40)$$

$$\left(\frac{m V_o^2}{2kT} \right) \sin \psi = \frac{V_o}{V_T} \sin \psi = u' \quad (41)$$

3° Nous introduisons les paramètres déjà utilisés :

$$\alpha = \frac{\hbar \omega q}{2kT} \quad \text{et} \quad \alpha_o = \frac{\hbar \omega q}{2kT_o} \quad (42)$$

Après quelques transformations, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle J_x \rangle = & \frac{n m^{1/2} D(o)}{2(2\pi)^{5/2} \hbar(kT)^{1/2} B} \frac{e^{-\alpha_o}}{\sinh \alpha_o} \left(\frac{2m\omega_c}{\hbar} \right)^{1/2} \frac{V_o^2}{V_o^2} \int_0^{\frac{\hbar q^2_{\max}}{2m\omega_c}} dx \int_0^{\frac{\hbar q^2_{\max}}{2m\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega} x} dt \frac{t^{1/2}}{x} \frac{e^{-t}}{t + \frac{\omega_c}{\omega} x} \\ & \int_{-\frac{V_o}{V_T}}^{\frac{V_o}{V_T}} du' \frac{u'}{\sqrt{1 - \frac{V_T^2}{V_o^2} u'^2}} \left\{ e^{-\left[\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left(x^{1/2} - \frac{1}{x^{1/2}} \right) - \left(\frac{\omega_c}{q} \right)^{1/2} \left(\frac{t}{x} \right)^{1/2} u' \right]^2} \right. \\ & \left. - e^{-\frac{\hbar \omega q}{kT_o}} e^{-\left[\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left(x^{1/2} + \frac{1}{x^{1/2}} \right) + \left(\frac{\omega_c}{\omega q} \right)^{1/2} \left(\frac{t}{x} \right)^{1/2} u' \right]^2} \right\} \quad (43) \end{aligned}$$

Nous introduisons ici la seconde approximation de ce calcul en limite quantique en imposant la limitation habituelle sur l'intensité du champ électrique :

$$\boxed{\frac{V_o}{V_T} \ll 1} \quad (44)$$

Ceci nous permet d'évaluer l'intégrale en u' intervenant dans (43) sous forme d'un développement en puissance de $\frac{V_o}{V_T}$. La suite des calculs est exposée dans l'annexe 7, dont nous extrayons les résultats essentiels suivants.

Pour obtenir des expressions algébriques simples de $\langle J_x(T_o, T) \rangle$, nous nous limitons à l'étude des deux cas extrêmes que nous distinguons à l'aide du paramètre $\frac{\omega q}{\omega_c}$.

1° Etude du premier cas : $\frac{\hbar\omega_q}{kT} \gg 1$

Cette inégalité est équivalente à : $\frac{\hbar\omega_q}{kT} \gg 1$. Comme $\frac{kT}{\hbar\omega_c} \ll 1$ quand la limite quantique est atteinte, il faut donc que la condition

$$\frac{\hbar\omega_q}{kT} \gg 1 \quad (45)$$

soit amplement respectée. Par conséquent, ce premier cas ne peut se rencontrer qu'aux basses températures et quand les valeurs de l'induction magnétique sont juste suffisantes pour atteindre la limite quantique.

En suivant les directives de l'annexe 7, on réussit alors à mettre $\langle J_x \rangle$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle J_x(T_o, T) \rangle = \langle J_x \rangle^{(1)} \operatorname{ch}(\alpha - \alpha_o) \frac{K_1(\alpha)}{K_1(\alpha_o)} \left(\frac{T_o}{T} \right)^{3/2} \left\{ 1 - \operatorname{th}(\alpha - \alpha_o) \frac{K_2(\alpha)}{K_1(\alpha)} \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \frac{V_o^2}{V_T^2} \frac{\hbar\omega_c}{kT} \left[\frac{7K_1(\alpha) + 9K_3(\alpha)}{2K_1(\alpha)} - \frac{7K_2(\alpha) + K_4(\alpha)}{K_1(\alpha)} \operatorname{th}(\alpha - \alpha_o) \right] \right\} \quad (46) \end{aligned}$$

La composante linéaire en E a pour expression :

$$\langle J_x \rangle^{(1)} = \frac{e^2 n m^{-1/2} D(o)}{(2\pi)^{3/2} \hbar\omega_q (kT_o)^{3/2}} \frac{K_1(\alpha_o)}{\operatorname{sh} \alpha_o} E \quad (47)$$

On déduit de (45) et (46) que d'une part :

- en ce qui concerne $\langle J_x \rangle^{(1)}$, il est indépendant de B ; de plus, comme $\alpha_o (= \frac{\hbar\omega_q}{2kT_o})$ est très élevé (cf. (45)), on peut remplacer $K_1(\alpha_o)$ par sa valeur asymptotique :

$$K_1(\alpha_o) \approx \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \alpha_o^{-1/2} e^{-\alpha_o}$$

et en déduire que $\langle J_x \rangle^{(1)}$ varie avec T_o comme $T_o^{-1} \exp - \frac{\hbar\omega_q}{kT_o}$

- d'autre part, en ce qui concerne la composante $\langle J_x(T_0) \rangle^{(3)}$ de la première théorie, obtenue en faisant $T = T_0$ dans (45), nous constatons que :

$$\langle J_x(T_0) \rangle^{(3)} = \frac{1}{16} \frac{V_0^2}{V_{T_0}^2} \frac{\hbar \omega_c}{kT_0} \frac{7K_1(\alpha_0) + 9K_3(\alpha_0)}{K_1(\alpha_0)} \langle J_x \rangle^{(1)} \quad (48)$$

Du fait que $\alpha_0 \gg 1$, les trois fonctions de Bessel intervenant dans (48) ont sensiblement la même valeur, si bien que le coefficient β_I caractérisant les premières déviations par rapport à la loi d'Ohm a pour expression :

$$\beta_I \approx \frac{1}{B^2} \frac{1}{V_{T_0}^2} \frac{\hbar \omega_c}{kT_0} \quad (49)$$

Le coefficient β_I est donc toujours positif ; il varie en B^{-1} et T_0^{-2} avec l'induction magnétique et la température respectivement.

Remarquons sur (48) que $\langle J_x(T_0) \rangle^{(3)}$ reste faible devant $\langle J_x \rangle^{(1)}$ uniquement quand la condition :

$$\frac{1}{16} \frac{V_0^2}{V_T^2} \frac{\hbar \omega_c}{kT_0} \ll 1 \quad (50)$$

est remplie. Dans la limite quantique, le domaine des champs électriques où l'on rencontre des déviations cubiques en champ électrique par rapport à la loi d'Ohm est donc fixé par l'inégalité (50) et non par (14).

2° Etude du second cas $\frac{\omega_q}{\omega_c} \ll 1$

La condition équivalente : $\frac{\hbar \omega_q}{kT} \frac{kT}{\hbar \omega_c} \ll 1$ montre que, l'inégalité $\frac{\hbar \omega_c}{kT} \gg 1$ étant déjà admise, le rapport $\frac{\hbar \omega_q}{kT}$ ne doit pas être trop élevé.

En pratique, l'énergie des phonons optiques étant relativement élevée ($\hbar \omega_q \approx 260^\circ K$ dans InSb), ce rapport ne saurait descendre à des valeurs très inférieures à l'unité. La condition $\frac{\omega_q}{\omega_c} \ll 1$ est donc réalisée aux

hautes températures et aux inductions magnétiques élevées.

En se reportant à l'annexe (7), on réussit à établir que :

$$\begin{aligned} \langle J_x(T_o, T) \rangle = \langle J_x \rangle^{(1)} \frac{K_o(\alpha)}{K_o(\alpha_o)} \operatorname{ch}(\alpha - \alpha_o) \left(\frac{T_o}{T} \right)^{3/2} \left\{ 1 - \operatorname{th}(\alpha - \alpha_o) \frac{K_1(\alpha)}{K_o(\alpha)} \right. \\ \left. + \frac{1}{16} \frac{V_o^2}{V_T^2} \frac{\hbar \omega_c}{kT} \left[\frac{3K_2(\alpha) + 5K_o(\alpha)}{K_o(\alpha)} - \frac{16K_1(\alpha) + K_3(\alpha)}{2K_o(\alpha)} \operatorname{th}(\alpha - \alpha_o) \right] \right\} \quad (51) \end{aligned}$$

$$\text{avec : } \langle J_x \rangle^{(1)} = \frac{e n m^{1/2} D(o)}{(2\pi)^{3/2} \hbar (kT_o)^{3/2}} \frac{K_o(\alpha_o)}{\operatorname{sh} \alpha_o} \frac{E}{B} \quad (52)$$

Comme dans le cas précédent, deux remarques sont à faire :

- l'expression de la composante $\langle J_x \rangle^{(1)}$ a déjà été obtenue dans la référence (13). Le point essentiel à noter est la dépendance en B^{-1} qui est à rapprocher du résultat établi au §II, dans l'étude de l'interaction avec les phonons acoustiques par l'intermédiaire du couplage piézoélectrique (cf. (22)).
- En faisant $T = T_o$ dans (50), on obtient le coefficient β_I sous la forme :

$$\beta_I = \frac{1}{16} \frac{1}{B^2 V_{T_o}^2} \frac{\hbar \omega_c}{kT_o} \frac{3K_2(\alpha_o) + 5K_o(\alpha_o)}{K_o(\alpha_o)} \quad (53)$$

Dans la mesure où α_o prend de fortes valeurs, c'est-à-dire quand la température est basse et l'induction magnétique très élevée, les fonctions de Bessel prennent sensiblement la même valeur et :

$$\beta_I \approx \frac{1}{2B^2} \frac{1}{V_{T_o}^2} \frac{\hbar \omega_c}{kT_o} \quad (54)$$

Dans ce cas, les valeurs de β_I , dans les deux limites $\frac{\omega_q}{\omega_c} \gg 1$ et $\frac{\omega_q}{\omega_c} \ll 1$, diffèrent d'un facteur deux entre elles.

Pour toutes les valeurs de α_o , β_I varie en B^{-1} et est toujours positif. Rappelons enfin que la remarque qui suit la formule (49) est aussi applicable

au cas où $\frac{\omega_q}{\omega_c} \ll 1$.

Nous passons maintenant à l'étude du second coefficient β_{II} et nous procédons donc au calcul de la température électronique.

V - DETERMINATION DE LA TEMPERATURE ELECTRONIQUE DANS LE CAS DU COUPLAGE

ELECTRONS-PHONONS OPTIQUES. EXPRESSION FINALE DE $\langle J_x \rangle$ DANS LA SECONDE

THEORIE

Le point de départ est la formule (30) dans laquelle $|C(q)|^2 = D^{(0)} q^{-2}$ et $\omega_q = c^{te}$. La technique de calcul est évidemment la même que pour $\langle J_x \rangle$. A l'ordre le plus bas par rapport au paramètre $\frac{V_o}{V_T}$ nous obtenons la relation suivante entre T , T_o et E :

$$\begin{aligned} & \frac{V_o^2}{V_T^2} \frac{\omega_c}{\omega_q} \int_0^{\frac{\hbar q_{\max}^2}{2m\omega_q}} dx \int_0^{\frac{\hbar q_{\max}^2}{2m\omega_c} - \frac{\omega_q}{\omega_c} x} dt \frac{t e^{-t}}{x \left(t + \frac{\omega_q}{\omega_c} x \right)} e^{-\frac{\alpha}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)} \left(1 - \frac{1}{x} \operatorname{th}(\alpha - \alpha_o) \right) \\ &= - \int_0^{\frac{\hbar q_{\max}^2}{2m\omega_q}} dx \int_0^{\frac{\hbar q_{\max}^2}{2m\omega_c} - \frac{\omega_q}{\omega_c} x} dt \frac{e^{-t}}{x \left(t + \frac{\omega_q}{\omega_c} x \right)} e^{-\frac{\alpha}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)} \{ \operatorname{th}(\alpha - \alpha_o) - \\ & \quad - \frac{V_o^2}{V_T^2} \frac{\omega_c}{\omega_q} \left(\alpha \frac{t}{x} - \frac{t}{2} \left(\alpha - \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\operatorname{th}(\alpha - \alpha_o)}{x} \right) \} \end{aligned} \quad (55)$$

Cette relation fait intervenir les intégrales I_q^p définies et calculées, dans deux cas limites, au cours de l'annexe 7.

1° Etude du premier cas : $\frac{\omega_q}{\omega_c} \gg 1$ (T et B faibles)

En suivant les directives de l'annexe 7, nous obtenons :

$$\text{th}(\alpha - \alpha_o) = \frac{V_o^2}{V_T^2} \frac{\omega_c}{\omega_q} \frac{\alpha K_2(\alpha) - K_1(\alpha)}{K_1(\alpha) + \frac{V_o^2}{2V_T^2} \frac{\omega_c}{\omega_q} (\alpha K_3(\alpha) + \alpha K_1(\alpha) - \frac{3}{2} K_2(\alpha))} \quad (56)$$

Pour que la condition $\frac{\omega_q}{\omega_c} \gg 1$ soit remplie, il faut que $\alpha \gg 1$. Dans ces conditions, les fonctions de Bessel $K_n(\alpha)$ intervenant dans (55) ont à peu près toutes la même valeur. Il sera alors possible de négliger le terme contenant $\frac{V_o^2}{2V_T^2}$ au dénominateur de (55), uniquement dans le cas où l'inégalité

$$\frac{1}{4} \frac{V_o^2}{V_T^2} \frac{\hbar \omega_c}{kT} \ll 1 \quad (57)$$

est vérifiée. Cette condition est donc plus restrictive que celle (cf. (14)) invoquée au début de ce calcul de phénomènes d'électrons tièdes. Elle est pratiquement identique à celle (50) que nous avons invoquée dans l'étude de β_I .

Quand (57) est vérifiée, $\text{th}(\alpha - \alpha_o)$ est très petit et peut être assimilé à $(\alpha - \alpha_o)$. Alors en utilisant la relation (4.58) entre les fonctions de Bessel K_n d'ordres différents, nous obtenons à l'ordre le plus bas en champ électrique :

$$1 - \frac{\alpha_o}{\alpha} = 1 - \frac{T}{T_o} = \frac{1}{2} \frac{V_o^2}{V_{T_o}^2} \frac{\omega_c}{\omega_q} \frac{K_2(\alpha_o) + K_o(\alpha_o)}{K_1(\alpha_o)} \quad (58)$$

Soit, en utilisant à nouveau le fait que $\alpha_o \gg 1$:

$$1 - \frac{T}{T_o} \approx \frac{V_o^2}{V_{T_o}^2} \frac{\omega_c}{\omega_q} \quad (59)$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer $\langle J_x \rangle$ dans le cadre de la seconde théorie. Nous devons pour cela reporter (58) dans (45), et tenir compte du fait que :

$$\frac{K_1(\alpha)}{K_1(\alpha_o)} = 1 + (\alpha - \alpha_o) \left(\frac{dK_1(\alpha)}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_o} = 1 + \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_o} \right) \frac{K_1(\alpha_o) + \alpha_o K_o(\alpha_o)}{K_1(\alpha_o)} \quad (60)$$

Tout calcul effectué, en ne retenant les termes que jusqu'à l'ordre trois en champ électrique, nous obtenons :

$$\langle J_x \rangle = \langle J_x \rangle^{(1)} \left\{ 1 + \frac{V_o^2}{V_{To}^2} \frac{\omega_c}{\omega_q} \left[\frac{K_2(\alpha_o) + K_o(\alpha_o)}{4K_1(\alpha_o)} - \alpha_o \left(\frac{(K_o(\alpha_o) + K_2(\alpha_o))^2}{2(K_1(\alpha_o))^2} - \frac{7K_1(\alpha_o) + 9K_3(\alpha_o)}{8K_1(\alpha_o)} \right) \right] \right\} \quad (61)$$

Comme $\alpha_o \gg 1$, on peut remplacer les fonctions de Bessel par leur développement asymptotique :

$$K_n(\alpha_o) = \left(\frac{\pi}{2\alpha_o} \right)^{1/2} e^{-\alpha_o} \left(1 + \frac{4p^2 - 1^2}{1! 8\alpha_o} + \frac{(4p^2 - 1^2)(4p^2 - 3^2)}{2! (8\alpha_o)^2} + \dots \right) \quad (62)$$

et finalement :

$$J_x \approx \langle J_x \rangle^{(1)} \left[1 + \frac{6V_o^2}{V_{To}^2} \frac{\omega_c}{\omega_q} \right] \quad (63)$$

Soit :

$$\beta_{II} = \frac{6}{B^2} \frac{1}{V_{To}^2} \frac{\omega_c}{\omega_q} \quad (64)$$

Le coefficient β_{II} est donc remarquablement simple ; toujours positif, il varie en B^{-1} et T_o^{-1} avec l'induction magnétique et la température. Il est nettement plus petit que β_I puisque :

$$\beta_{II}/\beta_I = 6 \frac{kT_o}{\hbar \omega_q} \ll 1$$

2° Etude du second cas $\frac{\omega_q}{\omega_c} \ll 1$ (T et B élevés)

Introduisons dans (55) les intégrales de l'annexe 7 calculées dans cette limite des températures et des inductions magnétiques élevées. Après quelques transformations, nous obtenons la relation entre T, T_o et E :

$$\text{th}(\alpha - \alpha_o) = \frac{V_o^2}{V_T^2} \frac{\omega_c}{\omega_q} \frac{\alpha K_1(\alpha) - K_o(\alpha)}{K_o(\alpha b) \text{Log} \frac{b\omega_c}{C\omega_q} + \frac{1}{2} \frac{V_o^2}{V_T^2} \frac{\omega_c}{\omega_q} (\alpha K_2(\alpha) + \alpha K_o(\alpha) - 3K_1(\alpha))} \quad (65)$$

Ici encore, pour ne pouvoir retenir que les termes E² dans (65), il faut pouvoir négliger le second terme du dénominateur de (65) devant le premier. Ceci implique, compte tenu du fait que α n'est jamais très petit devant l'unité, que l'inégalité :

$$\frac{V_o^2}{V_T^2} \alpha_o \frac{\omega_c/\omega_q}{\text{Log } b_o \omega_c/\omega_q} \ll 1 \quad (66)$$

soit vérifiée. Alors :

$$1 - \frac{\alpha_o}{\alpha} = 1 - \frac{T}{T_o} \approx \frac{V_o^2}{V_{T_o}^2} \frac{\omega_c}{\omega_q} \frac{\alpha_o K_1(\alpha_o) - K_o(\alpha_o)}{\alpha_o K_o(\alpha_o) \text{Log} \frac{b_o \omega_c}{\omega_q}} \quad (67)$$

Dans ce cas, la température électronique T peut être supérieure ou inférieure à T_o ; en effet, le facteur $1 - \frac{T}{T_o}$ passe de valeurs négatives à positives quand α_o croît et s'annule pour α_o ≈ 1/2. On retrouve un comportement analogue à celui déjà vu en limite classique au §4.V. En reportant cette expression dans la formule (51) donnant <J_x(T_o, T)> et en ne conservant que les termes jusqu'à l'ordre trois en champ électrique, nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle J_x \rangle = \langle J_x \rangle^{(1)} \left\{ 1 + \frac{V_o^2}{V_{T_o}^2} \frac{\omega_c}{\omega_q} \left[\frac{1}{\text{Log} \frac{b_o \omega_c}{\omega_q}} \frac{\alpha_o K_1(\alpha_o) - K_o(\alpha_o)}{K_o(\alpha_o b_o)} \left(\frac{3}{2\alpha_o} - \frac{2K_1(\alpha_o)}{K_o(\alpha_o)} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{8} \alpha_o \left(5 + \frac{3K_2(\alpha_o)}{K_o(\alpha_o)} \right) \right] \right\} \quad (68) \end{aligned}$$

Le coefficient β_{II} déduit de (68) s'avère donc relativement compliqué. On peut vérifier qu'il est toujours positif pour les valeurs de α_o de l'ordre de ou supérieures à l'unité. Ses variations avec l'induction magnétique sont approximativement en B^{-1} .

VI - RESUME DES RESULTATS ACQUIS

Nous présentons ci-dessous différents tableaux où l'on trouvera les différentes valeurs de β et de T correspondant aux multiples cas envisagés aux chapitres 4 et 5.

LIMITE CLASSIQUE : $\omega_c \tau \gg 1, \hbar\omega_c \ll kT_o$

	Coefficient β	Coefficient β_{II}	Température électronique $\frac{T}{T_o} - 1$	Condition de validité de β_I	Condition de validité de β_{II} et $\left\{ \frac{T}{T_o} - 1 \right\}$
ture du couplage electrons-phonons					
ons acoustiques: tentiel de défor- tion	$\frac{1}{5} \frac{1}{B^2} \frac{1}{V_{T_o}^2}$	$\frac{1}{6} \frac{1}{B^2} \frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{3} \frac{V_o^2}{s^2}$	$\frac{V_o^2}{V_{T_o}^2} \ll 1$	$\frac{V_o^2}{s^2} \ll 1$
ons acoustiques: uplage piézo- ectrique	$-\frac{1}{5} \frac{1}{B^2} \frac{1}{V_{T_o}^2}$	$-\frac{1}{6} \frac{1}{B^2} \frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{3} \frac{V_o^2}{s^2}$	$\frac{V_o^2}{V_{T_o}^2} \ll 1$	$\frac{V_o^2}{s^2} \ll 1$
ons optiques	$\frac{1}{5B^2} \frac{m}{\hbar\omega_q} \alpha_o \frac{9 - n(\alpha_o)}{n(\alpha_o) - 1}$	$\frac{1}{30B^2} \frac{m}{\hbar\omega_q} \alpha_o \frac{[5n(\alpha_o) - 1](9 - n(\alpha_o))}{n(\alpha_o) - 1}$	$\frac{V_o^2}{V_{T_o}^2} \left\{ 1 - \frac{n(\alpha_o)}{3} \right\}$	$\frac{V_o^2}{V_{T_o}^2} \ll 1$	$\frac{V_o^2}{V_{T_o}^2} \ll 1$

Notations : $V_{T_o}^2 = \frac{2kT_o}{m}$ $V_c = \frac{E}{B}$

$\alpha_o = \frac{\hbar\omega_q}{2kT_o}$ $n(\alpha_o) = \frac{K_2(\alpha_o)}{K_o(\alpha_o)}$

$\hbar\omega_q$: énergie des phonons optiques

Limite quantique : $\omega_c \tau \gg 1$, $\hbar\omega_c \gg kT$

Cas des phonons acoustiques

Nature du couplage électrons-phonons acoustiques	Coefficient β_I	Coefficient β_{II}	Température électronique $\frac{T}{T_0} - 1$	Condition de validité de β_I	Condition de validité de β_{II} et $\frac{T}{T_0} - 1$
Potentiel de déformation : $a_0^2 \ll 1$	$\frac{3}{8B^2\lambda^2} \frac{1}{\text{Log} \frac{4a_0}{(ec)^{1/2}}}$	$\frac{1}{B^2\lambda^2} \left[\frac{3}{4} \frac{\text{Log} 4a_0 / e^{3/2} c^{1/2}}{\text{Log} 4a_0 / b_0 e^{1/2} c^{1/2}} - \frac{1}{\text{Log} \frac{4a_0}{(ec)^{1/2}}} \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3} \frac{\text{Log} 4a_0 / e^{3/2} c^{1/2}}{\text{Log} 4a_0 / b_0 e^{1/2} c^{1/2}} \right) \right]$	$\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{\lambda^2} \frac{\text{Log} 4a_0 / e^{3/2} c^{1/2}}{\text{Log} 4a_0 / b_0 e^{1/2} c^{1/2}}$	$\frac{V_0^2}{V_{T_0}^2} \ll 1$	$\frac{V_0^2}{\frac{V_0^2}{2}} \ll 1$
Potentiel de déformation $a_0^2 \ll 1$	$B^{-2} T_0$	$B^{-2} T_0$	$\sim B^{-2} T_0^0$	$\frac{V_0^2}{\frac{V_0^2}{2}} \ll 1$	$\frac{V_0^2}{\frac{V_0^2}{2}} \ll 1$
Couplage piézoélectrique $a_0^2 \ll 1$	$\frac{3}{8B^2\lambda^2} \frac{1}{\text{Log} \frac{4a_0}{c^{1/2}}}$	$\frac{1}{B^2\lambda^2} \left[\frac{3}{4} \frac{\text{Log} 4a_0 / e^{1/2} c^{1/2}}{\text{Log} 4a_0 / c^{1/2}} - \frac{1}{\text{Log} \frac{4a_0}{c^{1/2}}} \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3} \frac{\text{Log} 4a_0 / e^{1/2} c^{1/2}}{\text{Log} 4a_0 / c^{1/2}} \right) \right]$	$\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{\lambda^2} \frac{\text{Log} 4a_0 / e^{1/2} c^{1/2}}{\text{Log} 4a_0 / c^{1/2}}$	$\frac{V_0^2}{V_{T_0}^2} \ll 1$	$\frac{V_0^2}{\frac{V_0^2}{2}} \ll 1$
Couplage piézoélectrique $a_0^2 \ll 1$	$\sim B^{-2} T_0$	$\sim B^{-2} T_0$	$\sim B^{-2} T_0^0$	$\frac{V_0^2}{\frac{V_0^2}{2}} \ll 1$	$\frac{V_0^2}{\frac{V_0^2}{2}} \ll 1$

Notations : $a_0^2 = \frac{V_0^2}{s} \frac{kT_0}{4\hbar\omega_c}$ $b_0^2 = 1 - \frac{4kT_0}{\hbar\omega_c}$

Limite quantique : $\omega_c \tau \gg 1$; $\hbar\omega_c \gg kT_o$

Cas des phonons-optiques

1er Cas : $\frac{\omega_q}{\omega_c} \gg 1$, $\frac{V_o^2}{V_{T_o}^2} \frac{\hbar\omega_c}{kT_o} \ll 1$:

$$\beta_I = \frac{1}{B} \frac{1}{2} \frac{\hbar\omega_c}{V_{T_o}^2 kT_o} , \quad \beta_{II} = \frac{6}{B} \frac{1}{2} \frac{\omega_c}{V_{T_o}^2 \omega_q}$$

$$\frac{T}{T_o} - 1 = \frac{V_o^2}{V_{T_o}^2} \frac{\omega_c}{\omega_q}$$

2me Cas : $\frac{\omega_q}{\omega_c} \ll 1$

$$\beta_I = \frac{1}{16} \frac{1}{B} \frac{1}{2} \frac{\hbar\omega_c}{V_{T_o}^2 kT_o} \left(3 \frac{K_2(\alpha_o)}{K_o(\alpha_o)} + 5 \right) \quad \text{quand} \quad \frac{V_o^2}{V_{T_o}^2} \frac{\hbar\omega_c}{kT_o} \ll 1$$

$$\beta_{II} = \frac{1}{B} \frac{1}{2} \frac{\omega_c}{V_{T_o}^2 \omega_q} \left[\frac{1}{\text{Log } b_o \omega_q} \frac{\alpha_o K_o(\alpha_o) - K_o(\alpha_o)}{K_o(\alpha_o b_o)} \left\{ \frac{3}{2\alpha_o} - \frac{2K_1(\alpha_o)}{K_o(\alpha_o)} \right\} + \frac{1}{8\alpha_o} \left\{ 5 + \frac{3K_2(\alpha_o)}{K_o(\alpha_o)} \right\} \right]$$

$$\frac{T}{T_o} - 1 = \frac{V_o^2}{V_{T_o}^2} \frac{\omega_c}{\omega_q} \frac{K_o(\alpha_o) - \alpha_o K_1(\alpha_o)}{\alpha_o K_o(\alpha_o) \text{Log } b_o \omega_q} \frac{\omega_c}{\omega_q}$$

Condition de validité de β_{II} et $(\frac{T}{T_o} - 1)$: $\frac{V_o^2}{V_{T_o}^2} \alpha_o \frac{\omega_c}{\omega_q} \frac{1}{b_o \omega_q} \ll 1$

CHAPITRE 6

ETUDE EXPERIMENTALE DES DEVIATIONS PAR RAPPORT

A LA LOI D'OHM DANS L'ANTIMONIURE D'INDIUM

Nous avons entrepris cette étude expérimentale, avant de nous attaquer à la seconde théorie et pour tester la première qui, comme nous l'avons vu au chapitre 4, donne pour le coefficient β une expression différente de celle obtenue à partir de l'équation de Boltzmann (cas du couplage électrons-phonons acoustiques par l'intermédiaire du potentiel de déformation).

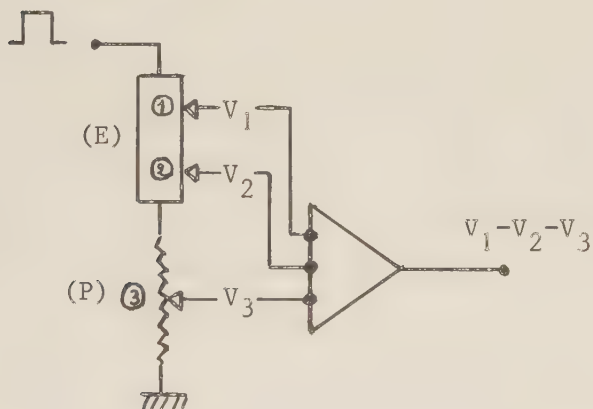
Il nous est apparu que l'étude de la limite classique des inductions magnétiques élevées était aisée à mener dans un corps tel que l'Antimoniure d'Indium ; en effet les conditions $\omega_c \tau \gg 1$ et $\hbar\omega_c \ll kT_0$ se trouvent facilement réalisées dans cette substance à l'aide d'inductions magnétiques produites par des électro-aimants courants et dans une large gamme de températures très accessibles. Nous avons choisi l'intervalle des températures comprises entre celle de l'Azote liquide et celle de l'ambiante, intervalle où nous savons -mais ceci est un point controversé- que les électrons interagissent avec les phonons optiques⁽¹⁵⁾ et éventuellement avec les phonons acoustiques par l'intermédiaire du couplage piézoélectrique⁽¹⁶⁾. Par ailleurs, nous n'avons pas dépassé, pour l'induction magnétique, la valeur de $1,2 \text{ Wb/m}^2$ car, au-delà, des phénomènes d'instabilités électriques viennent perturber les mesures ; nous pouvons signaler d'ailleurs qu'à la température de l'Azote liquide (77°K) l'égalité $\hbar\omega_c = kT_0$ se produit pour une induction magnétique de $0,8 \text{ Wb/m}^2$.

I - SCHEMA DE PRINCIPE DU MONTAGE DE MESURE

La détermination du coefficient β découle des mesures de variations de la résistance d'un échantillon en fonction du champ électrique régnant dans l'échantillon. Il est évident que l'utilisation de champs électriques continus n'est pas adaptée à notre problème ; en effet, l'énergie Joule devient trop importante quand les champs électriques sont élevés et conduit soit à un échauffement importun de l'échantillon, soit à sa destruction dans le pire des cas. Nous utilisons donc des champs électriques

impulsionnels dont la durée et la fréquence de répétition sont suffisamment faibles de façon à échapper à l'écueil mentionné ci-dessus.

Il est bien connu que pour mesurer des variations faibles de résistance, une méthode de comparaison est un outil de choix. Il faut cependant tenir compte que dans les mesures de résistances de semiconducteurs, il est préférable de séparer nettement les contacts d'amené et de sortie de courant des contacts de prise de potentiel. Le schéma relativement simple de la figure 5 obéit à ces deux impératifs.



Un générateur d'impulsions attaque un échantillon de mesure (E), de forme parallélépipédique, en série avec un potentiomètre (P). Soient V_1 , V_2 et V_3 les trois différences de potentiel mesurées respectivement entre les points ①, ② et ③ du circuit et la masse.

Fig. 5

Désignons par R la résistance mesurée entre les sondes ① et ② de l'échantillon. Cette résistance dépend de la composante longitudinale E_x du champ électrique auquel elle est soumise ; soit R_0 sa valeur à faible champ électrique, quand la loi d'Ohm est vérifiée ; R_0 est indépendant du champ E_x ; désignons alors par $\Delta R(E_x)$ sa variation caractéristique du phénomène d'électrons tièdes. Supposons de plus que le potentiomètre ait une résistance indépendante du champ électrique qui lui est appliqué ; ajustons la position de son curseur de façon que la résistance R_c mesurée entre le point (3) et la masse soit exactement égale à R_0 . Dans ces conditions, on trouve immédiatement que :

$$\Delta V = V_1 - V_2 - V_3 = \Delta R(E_x) \frac{V_3}{R_0} \quad (1)$$

Pour les faibles déviations par rapport à la loi d'Ohm, $\Delta R(E_x)$ doit varier comme E_x^2 ; définissons donc le paramètre γ caractérisant expérimentalement ces déviations et tel que :

$$\Delta R(E_x) = R_0 + r E_x^2 \quad (2)$$

Si l'on appelle alors ℓ la longueur de l'échantillon entre les points ① et ②, le champ électrique E_x vaut $(V_1 - V_2)/\ell$. Par conséquent,

$$\Delta V = r \frac{(V_1 - V_2)^2}{\ell^2} V_3 \quad (3)$$

Quand les déviations par rapport à la loi d'Ohm sont très faibles, on peut remplacer, dans le second membre de (3), $V_1 - V_2$ par V_3 ; ceci revient à négliger des termes en E_x^5 dans ΔV . Finalement :

$$\Delta V \approx \frac{r V_3^3}{\ell^2} \quad (4)$$

On constate donc sur (4) que, pour déterminer le paramètre caractéristique r , il suffit de tracer la courbe :

$$(\Delta V)^{1/3} = f(V_3)$$

qui doit se réduire à une droite dont la pente r/ℓ^2 fournit le coefficient cherché.

Remarque : La géométrie parallélépipédique de l'échantillon permet de séparer efficacement les contacts d'amené et de sortie de courant des contacts de mesure des d.d.p. Une telle disposition élimine de nombreux effets de bords parasites bien connus. Par contre, elle ne permet pas de mesurer directement le coefficient β ; seul le coefficient r , relié à β ainsi que nous allons le voir, est directement accessible. Si l'on avait choisi pour les échantillons une géométrie dite de Corbino, nous aurions mesuré β directement ; mais des questions d'adaptation d'impédances d'une part, des difficultés de réalisation des contacts d'autre part, nous ont conduit à rejeter cette solution.

II. - RELATION ENTRE LES COEFFICIENTS r et β

Quand on fait passer un courant dans un échantillon parallélépipédique homogène, on impose pratiquement au vecteur densité de courant $\langle \vec{J} \rangle$ d'être longitudinal. Quand en plus on applique une induction magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au courant, le champ électrique $\vec{E}$ qui règne dans l'échantillon est perpendiculaire à $\vec{B}$ mais n'est pas parallèle à $\vec{J}$.

Désignons par OX la direction de $\vec{E}$ (cf. figure 6) ; d'après les résultats des chapitres antérieurs concernant les phénomènes jusqu'à l'ordre trois en champ électrique, les composantes du vecteur densité de courant suivant $\vec{E}$ et suivant la direction OY perpendiculaire à $\vec{E}$ et $\vec{B}$ s'écrivent :

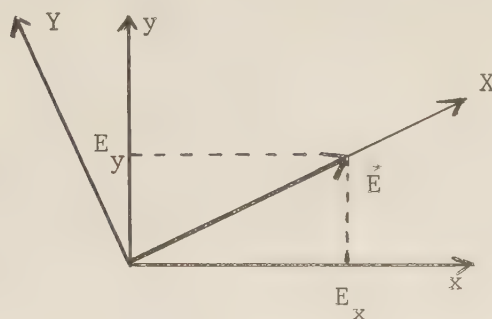


Fig. 6

$$\langle J_X \rangle = \sigma_{xx}^{(0)} (1 + \beta E^2) E \quad (5)$$

$$\langle J_Y \rangle = ne \frac{E}{B} = -\sigma_{xy}^{(0)} E \quad (6)$$

Le coefficient $\sigma_{xx}^{(0)}$ n'est autre que la conductivité électrique dans la région ohmique déterminée aussi dans les chapitres antérieurs.

On déduit de (5) et (6) que, si l'on impose au vecteur densité de courant d'être dirigé suivant la longueur ox de l'échantillon parallélépipédique, alors :

$$\langle J_X \rangle = \sigma_{xx}^{(0)} \left[1 + \beta (E_x^2 + E_y^2) \right] E_x + \sigma_{xy}^{(0)} E_y \quad (7)$$

$$\langle J_Y \rangle = 0 = -\sigma_{xy}^{(0)} E_x + \sigma_{xx}^{(0)} \left[1 + \beta (E_x^2 + E_y^2) \right] E_y \quad (8)$$

On obtient immédiatement à partir de (7) et (8), une relation entre E_x et $\langle J_X \rangle$ qui définit la résistivité en présence de $\vec{B}$ et $\vec{E}$.

$$E_x = \frac{\sigma_{xx}^{(0)}}{(\sigma_{xx}^{(0)})^2 + (\sigma_{xy}^{(0)})^2} \left[1 + \beta \left(\frac{(\sigma_{xy}^{(0)})^2}{(\sigma_{xx}^{(0)})^2} - 1 \right) E_x^2 \right] \langle J_X \rangle \quad (9)$$

Rappelons nous alors que dans la limite des inductions magnétiques élevées ($\omega_c \tau \gg 1$) $\sigma_{xx}^{(0)} \ll \sigma_{xy}^{(0)}$. Par conséquent, la modification relative de résistivité à l'ordre le plus bas en champ électrique se réduit à :

$$\frac{\Delta \rho(E)}{\rho(E=0)} = \beta \left(\frac{\sigma_{xy}^{(0)}}{\sigma_{xx}^{(0)}} \right)^2 E_x^2 \quad (10)$$

Le coefficient r défini par la formule (2) est donc lié à β par la relation :

$$r = \beta \left(\frac{\sigma_{xy}^{(0)}}{\sigma_{xx}^{(0)}} \right)^2 = \beta \frac{n^2 e^2}{B^2} \frac{1}{(\sigma_{xx}^{(0)})^2} \quad (11)$$

Du point de vue de la variation de r avec l'induction magnétique, comme dans tous les phénomènes classique où $\hbar \omega_c \ll kT$ nous avons montré que :

$$\beta \sim B^{-2} \text{ et } \sigma_{xx}^{(0)} \sim B^{-2}$$

Nous pouvons dire que r est indépendant de B dans la limite classique.

Dans la limite quantique on ne peut énoncer de résultat général aussi précis ; il faut considérer chaque type de couplage et chaque gamme de température. Cependant, compte tenu des résultats du chapitre 5, r ne peut que décroître quand B augmente.

Passons maintenant aux variations de r avec la température ; ici encore nous ne pouvons énoncer de résultat général, en dehors du fait que r s'annule et change de signe en même temps que β .

Enfin en ce qui concerne la grandeur de r , comme $\left(\frac{\sigma_{xy}^{(0)}}{\sigma_{xx}^{(0)}} \right)^2 \gg 1$

quand $\omega_c \tau \gg 1$, le coefficient r est toujours supérieur à β ; les déviations par rapport à la loi d'Ohm s'observeront donc plus facilement en géométrie allongée qu'en géométrie de Corbino.

III - MONTAGE EXPERIMENTAL ET METHODE DE MESURE

a) Appareillage électronique

Le schéma de l'ensemble des appareils électroniques est représenté sur la figure 7. L'organe essentiel en est le système de détection de la d.d.p. $\Delta V = V_1 - V_2 - V_3$ définie au § I, car il conditionne le choix de nombreux appareils qui l'entourent. En effet, chaque différence de potentiel V_1, V_2, V_3 s'élèvera dans nos mesures sur InSb à quelques dizaines de volts au maximum ; la déviation par rapport à la loi d'Ohm décélée correspondra parfois à des ΔV aussi faibles que quelques millivolts. Il faut donc que la mesure de chacune des trois différences de potentiel s'effectue avec une erreur relative inférieure à 10^{-5} . En particulier il faut prendre garde à ce que le système de mesure des trois d.d.p. ne déforme par les trois impulsions de façon différente ce qui introduirait dans la différence $V_1 - V_2 - V_3$ une erreur qui n'aurait aucun rapport avec un comportement non-ohmique de l'échantillon. Pour éliminer cette difficulté nous avons utilisé un appareil unique mesurant directement ΔV : un amplificateur opérationnel différentiel monté en amplificateur de gain unité ; un tel amplificateur peut en effet délivrer un signal de sortie égal à la somme algébrique de plusieurs d.d.p. convenablement appliquées à ses deux entrées.

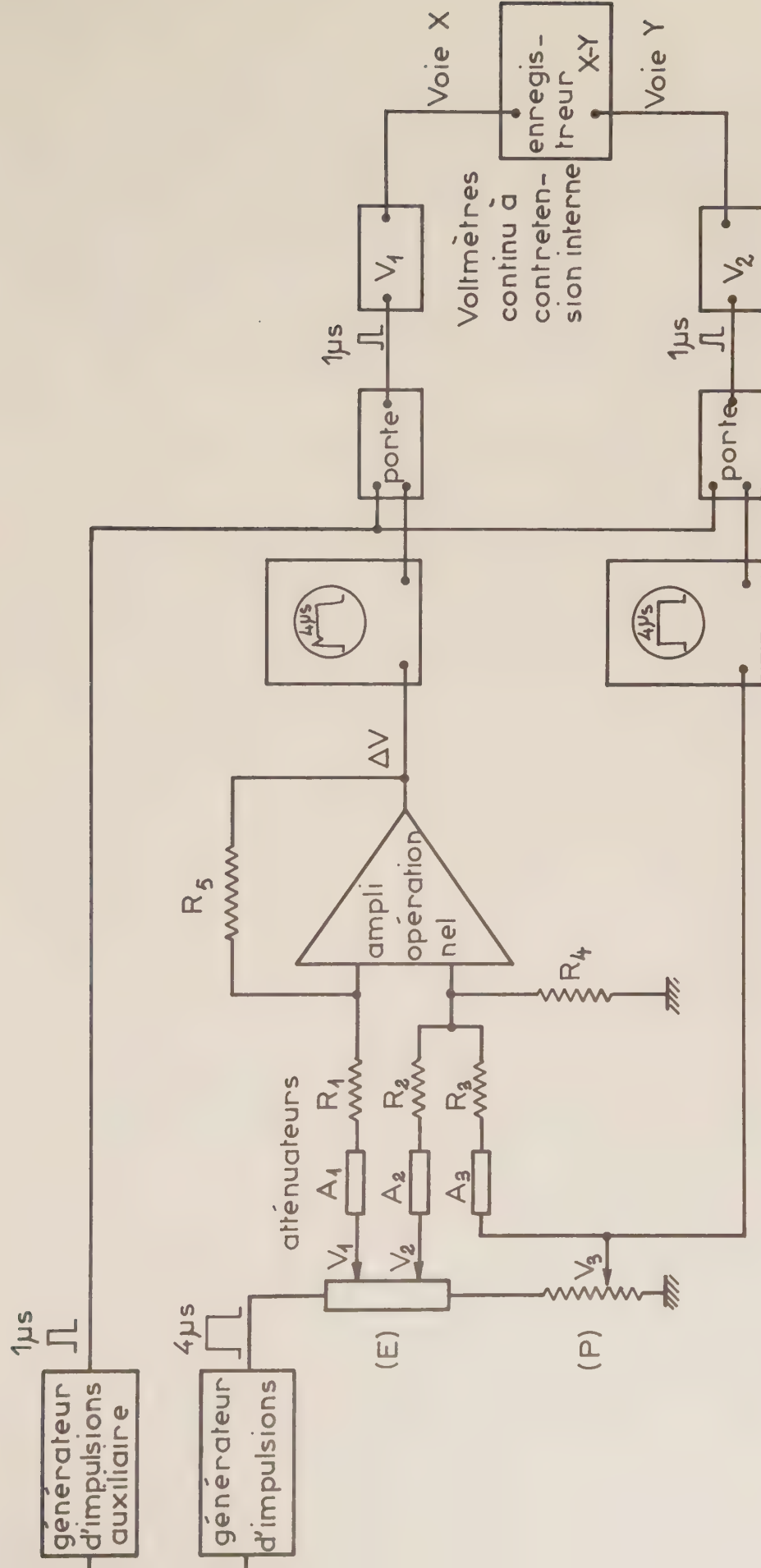
L'amplificateur opérationnel requis doit posséder trois caractéristiques fondamentales :

1°) Sa bande passante doit être large car les impulsions relativement intenses que reçoit l'échantillon seront aussi brèves que possible pour éviter l'échauffement par effet Joule.

2°) Son taux de réjection en mode commun doit être élevé de façon à déceler de faibles ΔV associés à des V_1, V_2, V_3 élevés.

3°) Enfin, les d.d.p. applicables à ses entrées doivent être suffisamment intenses pour que des déviations par rapport à la loi d'Ohm interviennent.

L'amplificateur opérationnel Philbrick P.85.AH s'est avéré celui qui convenait le mieux (bande passante à gain unité : 30 MHz ; taux de réjection en mode commun : 10^5 ; d.d.p. maximum sur chaque entrée : 11 V). Quand nous avons utilisé des d.d.p. supérieures aux 11 V admissibles, nous avons introduit des atténuateurs calibrés à résistances, comme il est figuré sur le schéma 7.



Appareillage électronique

Fig. 7



La bande passante de 30 MHz permet de travailler avec des impulsions rectangulaires de durée minimum égale à 4 μ s. Toutefois, on constate sur l'oscillographe branché à la sortie de l'amplificateur opérationnel que le plateau des impulsions a subi des déformations et que seule la dernière partie de l'impulsion, d'une largeur sensiblement égale à 1 μ s, est transmise sans distorsion ; pendant les trois premières microsecondes le palier de l'impulsion est déformé et cette déformation varie avec l'amplitude de ΔV .

A ce stade de la chaîne de mesure, on pourrait penser tracer la courbe $\Delta V = f(V_3)$ sur l'oscillographe en procédant de la façon suivante. On supprime le balayage et on utilise l'oscillographe en enregistreur X-Y. La voie X est alimentée par V_3 et la voie Y par ΔV . De plus, à l'aide d'un générateur extérieur auxiliaire convenablement synchronisé on déclanche le Wenhelt uniquement pendant la dernière microseconde de l'impulsion. A chaque valeur de V_3 correspond donc un point d'ordonnée ΔV . En faisant varier V_3 il est donc possible d'enregistrer sur un oscillographe à mémoire -du type Tektronix 549 par exemple- la courbe cherchée et de photographier l'écran une fois le tracé terminé. En pratique les dimensions relativement petites de la photo -6x9 cm- ne nous permettent pas de vérifier avec une précision suffisante que ΔV varie comme V_3^3 et d'en déduire convenablement le coefficient r . De plus, préalablement à tout tracé de courbe $\Delta V = f(V_3)$, il faut ajuster la position du curseur du potentiomètre (P) de façon que la résistance R_c soit égale à R_0 (cf. §I). La façon la plus simple de réaliser cette condition est de faire en sorte que la courbe $\Delta V = f(V_3)$ démarre horizontalement à partir de $V_3 = 0$. La vérification d'un tel comportement est particulièrement aléatoire sur une photo aux dimensions réduites.

Nous avons donc décidé d'utiliser un enregistreur X-Y de grandes dimensions (30 x 40 cm) et par conséquent de transformer nos impulsions en signaux continus d'amplitudes proportionnelles à celles des impulsions ΔV et V_3 . Comme seule la dernière microseconde des impulsions est utilisable, il faut préalablement supprimer les trois premières. Cette opération s'effectue à la sortie de l'oscillographe utilisé en amplificateur à l'aide d'une porte qui se débloque et laisse passer l'impulsion uniquement pendant sa dernière microseconde. L'ouverture de la porte est commandée par un générateur

d'impulsions alimentant l'échantillon. Un système de détection à diodes transforme les impulsions d'une microseconde en signal continu.

Il est bien évident qu'en-dessous d'une certaine fréquence f de répétition des impulsions -liée à la constante de temps du circuit de détection- l'amplitude du signal continu détecté sera trop faible, décroîtra quand f diminuera et présentera une ondulation rédibitoire. Le système que nous avons utilisé fonctionne convenablement à partir de $f = 10$ Hz. Cette valeur de f associée à la largeur de $4 \mu s$ des impulsions n'a jamais entraîné dans nos échantillons des échauffements par effet Joule gênant nos mesures.

En pratique, avec la porte de notre montage, même en l'absence de signal à l'entrée de celle-ci, il existe un signal de sortie non nul produit par les impulsions de synchronisation. Le système de détection délivre donc un signal continu non nul même quand $\Delta V = 0$. Quand $\Delta V \neq 0$, se superpose à ce signal parasite, le signal continu proportionnel à ΔV . Pour éliminer la composante continue parasite, on branche à la sortie du détecteur un voltmètre continu muni d'une contre-tension interne (voltmètre Keithley, modèle 150 A par exemple). Grâce à cette contre-tension interne, on compense rigoureusement la composante parasite quand $\Delta V = 0$. Le voltmètre affiche alors, quand $\Delta V \neq 0$, une indication continue proportionnelle. La sortie du voltmètre est alors branchée sur la voie Y d'un enregistreur X-Y (du type Cimatic M.100 par exemple).

La voie X doit dévier proportionnellement à V_3 . Un système oscillographe + porte synchronisée + détecteur + voltmètre continu à contre-tension interne - système jumeau du précédent par conséquent - transforme le signal impulsionnel V_3 en signal continu proportionnel.

Les deux oscillographes de la chaîne, outre leur rôle d'amplificateur permettant de faire fonctionner à haut niveau d'entrée les portes et les détecteurs, servent à l'étalonnage des voies X et Y de l'enregistreur ; c'est sur leur écran qu'on lit directement la valeur de ΔV associée à une d.d.p. V_3 donnée.

En résumé, d'une part l'amplificateur opérationnel, l'organe essentiel qui mesure ΔV , nous a imposé la durée des impulsions ; d'autre part, pour obtenir des courbes $\Delta V = f(V_3)$ dont le dépouillement soit aisé, nous avons

mis au point un système de détection qui nous a imposé l'usage d'une porte et de ne pas descendre en-dessous d'une fréquence de répétition égale à 10 Hz.

Terminons cette description de l'appareillage électronique en signalant qu'au début de la chaîne de mesure, nous avons utilisé un générateur d'impulsions de marque Férisol capable de délivrer des impulsions de 60 V sur une charge adaptée de 50 Ω . Cet appareil s'est avéré être le meilleur quant à l'horizontalité du plateau des impulsions. Son seul inconvénient réside dans la façon discontinue dont varie la d.d.p. de sortie qui oblige de tracer les courbes $\Delta V = f(V_3)$ par points.

b) Linéarité de la chaîne

Notre but étant de mesurer des déviations par rapport à une loi linéaire, il est indispensable de s'arrêter un instant sur la linéarité de la chaîne des appareils électroniques. La détermination expérimentale de cette linéarité s'effectue très simplement de la manière suivante. A la place de l'échantillon, nous branchons une résistance -un fil de constantan- indépendante de la d.d.p. appliquée à ses bornes et de valeur sensiblement égale à celle de l'échantillon sur lequel nous allons travailler. Nous traçons $\Delta V = f(V_3)$ pour toutes les valeurs de V_3 avec lesquelles nous allons fonctionner ensuite. Si nous avons préalablement équilibré le montage en ayant réglé égal à un le gain de chacune des trois voies de l'amplificateur opérationnel et en ayant convenablement placé le curseur du potentiomètre (P), nous devons trouver $\Delta V = 0$. Si, au contraire, nous avons volontairement déséquilibré le montage à l'aide du curseur, nous devons trouver $\Delta V = kV_3$ et la courbe enregistrée doit être une droite.

Dans le premier cas, pour une d.d.p. de sortie du générateur égale à 60 V, ΔV reste inférieur à 1 mV. Dans le second cas, lorsque $\Delta V < 300$ mV, la courbe $\Delta V = f(V_3)$ se confond avec la droite $\Delta V = kV_3$ à 5.10^{-3} près dans les conditions les plus défavorables d'une d.d.p. de sortie maximum égale à 60 V.

c) Echantillons, porte-échantillons et appareillage environnant

Un des premiers problèmes rencontrés, lié à la nature des échantillons, relève de l'adaptation de la résistance du circuit de mesure à l'impédance de sortie du générateur qui est de 50Ω . Pour les températures voisines de celle de l'azote liquide, cette adaptation ne présente pas de difficulté. Par contre, la résistivité de l'Antimoniure d'Indium très pur de type n que nous avons utilisé décroissant très fortement dès que T dépasse 150°K , la résistance risquait de descendre à des valeurs négligeables devant 50Ω . Afin de compenser cela, nous avons opéré avec des échantillons parallélépipédiques dont les dimensions -épaisseur et largeur- étaient les plus faibles que l'on puisse obtenir en découpant avec une scie à étincelage les lingots d'InSb (épaisseur $\approx 0,15 \text{ mm}$, largeur $\approx 0,3 \text{ mm}$). Un outil en graphite permet d'obtenir des échantillons à "oreilles" dont la forme classique est représentée ci-dessous.

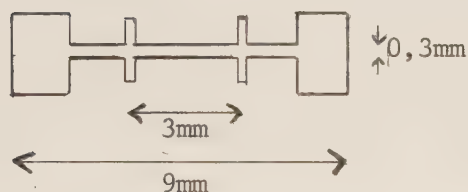


Fig. 8

Cette géométrie limite au maximum les effets de bords parasites associés aux amené et sortie de courant et perturbe au minimum le parallélisme des lignes de courant dans la partie centrale de l'échantillon.

L'échantillon étudié, dont les connexions ont été soudées à l'Indium, adhère à une feuille de mica ultramince collée par de la graisse à vide à un gros bloc de cuivre. La feuille de mica assure l'isolement électrique de l'échantillon par rapport au bloc de cuivre, tout en maintenant un bon contact thermique entre ce dernier et l'échantillon.

Le bloc de cuivre est muni à sa partie inférieure d'une chaufferette à même de faire varier sa température et par conséquent celle de l'échantillon. Il est de plus solidaire d'une tige creuse dans laquelle passent tous les fils conduisant à l'échantillon, à la chaufferette et au thermocouple. Cet ensemble (cf. fig. 9) porte échantillon + tige est placé dans une enceinte tubulaire en acier inox, à double parois, dont on peut évidemment obturer l'ouverture supérieure par un système de collerette et de joint torique. Des ouvertures sont aménagées de façon à pouvoir vider ou

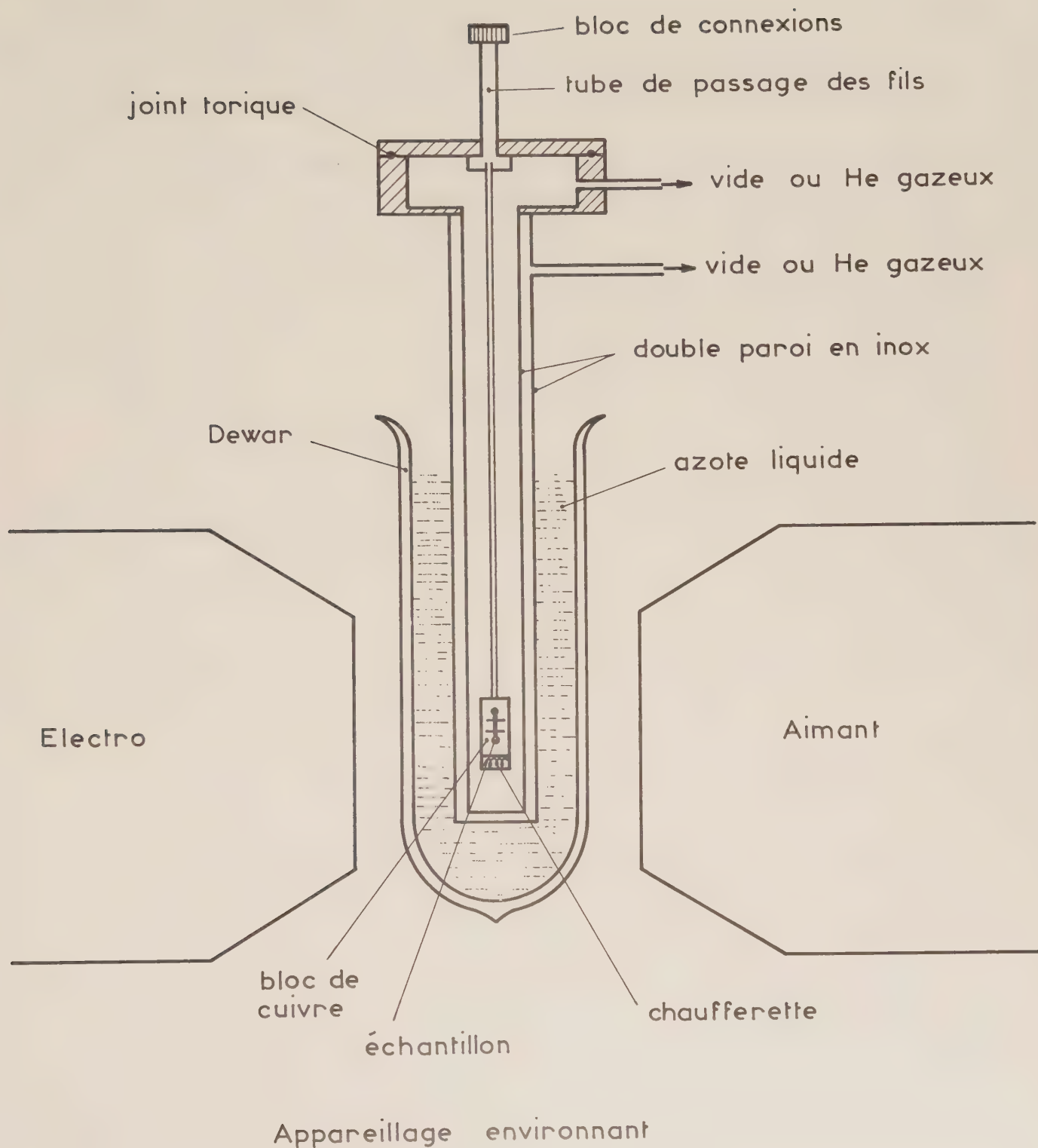


Fig. 9

remplir d'Hélium le milieu où se trouve l'échantillon et le volume contenu entre la double paroi. Enfin, le tube en inox est plongé dans un dewar en verre contenant en permanence de l'Azote liquide ; l'ensemble est placé entre les pièces polaires d'un électro-aimant..

La double paroi joue un rôle important dans le maintien du bloc de cuivre -et par conséquent de l'échantillon- à une température constante. L'invariance de cette température pendant le tracé d'une courbe $\Delta V = f(V_3)$ est fondamentale. En effet, si du fait d'une variation infime de la température du bloc de cuivre égale à ΔT_0 , la résistance de l'échantillon varie pendant le tracé d'une courbe, la condition d'équilibre initiale de notre montage selon laquelle $R_0(T_0) = R_c$ est rompue ; la différence ΔV va donc représenter la somme de deux déséquilibres : le premier, que l'on cherche à mesurer, dû au phénomène d'électrons tièdes ; le second dû au fait que $R_0(T_0 + \Delta T_0) \neq R_c$. Il est bien évident que $R_0(T_0)$ variant, quand $T_0 > 150^\circ K$, très rapidement, un déséquilibre produit par ΔT_0 risque d'être très supérieur à un déséquilibre produit par un champ électrique. Pratiquement un déséquilibre dû à ΔT_0 se produisant en cours de tracé s'observe immédiatement du fait que la courbe $\Delta V = f(V_3)$ obtenue quand V_3 croît ne se confond pas avec celle obtenue quand V_3 décroît. De plus, ΔT_0 étant en général variable au cours du temps, ΔV variera de même quand V_3 est fixé.

La meilleure vérification que la température est restée constante pendant tout un tracé s'obtient a posteriori, quand on vérifie que la courbe $\Delta V = f(V_3)$ est bien une cubique.

En résumé, il faut que la variation de résistance de l'échantillon, due à une variation de sa température, soit négligeable devant $\Delta R = R_0 \times E^2$. On conçoit aussi que tout échauffement par effet Joule soit à bannir pendant les mesures, puisqu'il produit les mêmes effets qu'un ΔT_0 provoqué par une variation de température du bloc de cuivre. Nous avons déjà dit avoir choisi la durée des impulsions de champ électrique et leur fréquence de répétition de façon adéquate. Notons cependant qu'en supposant la température du bloc de cuivre constante, l'évacuation des calories apportées par l'effet Joule est faite :

- 1°) par le bloc de cuivre à travers la feuille de mica ;
- 2°) par l'Hélium gazeux qui emplit tout l'intérieur du tube inox.

Le maintien du bloc de cuivre à une température constante est dû à l'équilibre qui s'établit entre les calories apportées par la chaufferette (alimentée par un courant stabilisé à 10^{-3} près) et les frigories provenant de l'Hélium gazeux se trouvant entre la double paroi du tube en inox. Ce gaz, dont la pression est réglable, sert d'échangeur entre le milieu gazeux dans lequel baigne l'échantillon et l'Azote liquide où le tube en inox est plongé.

Une fois l'équilibre thermique atteint par le porte-échantillon, la température reste constante pendant le tracé d'une courbe $\Delta V = f(V_3)$ dont la durée est de l'ordre de la minute. Les fluctuations éventuelles de températures entre des tracés de courbes correspondants à des valeurs de l'induction différentes n'interviennent pas car elles n'affectent pratiquement pas les valeurs de r .

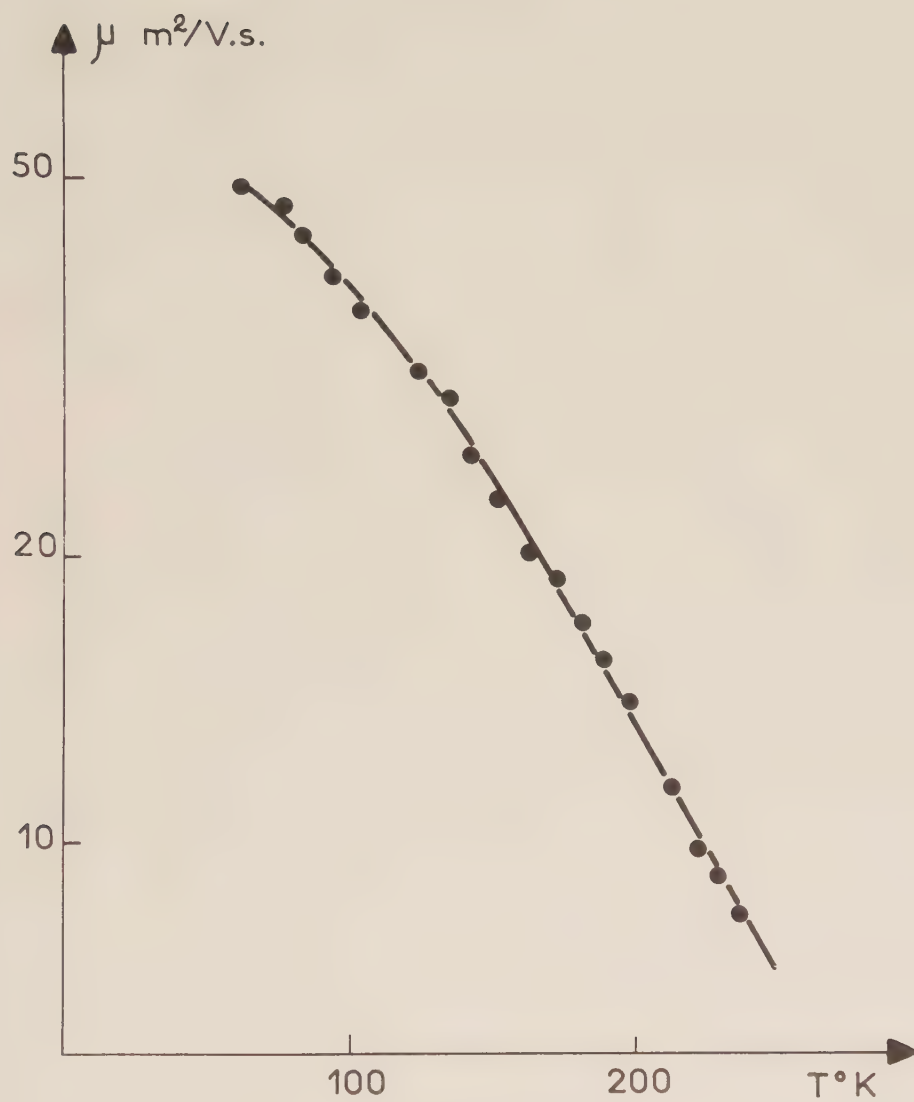
Le gros inconvénient de cette méthode provient de ce qu'il faut attendre longtemps (10 à 30 minutes) pour que l'équilibre thermique s'établisse quand on passe d'une température de mesure à la suivante. Une série de mesures dans lesquelles nous étudions les variations de r en fonction de T_0 et B est ainsi susceptible de durer plusieurs semaines. En compensation, nous avons pu vérifier que nos mesures sur un même échantillon étaient parfaitement reproductibles sur des intervalles de temps de l'ordre du mois.

IV - RESULTATS EXPERIMENTAUX

a) Généralités et phénomènes linéaires

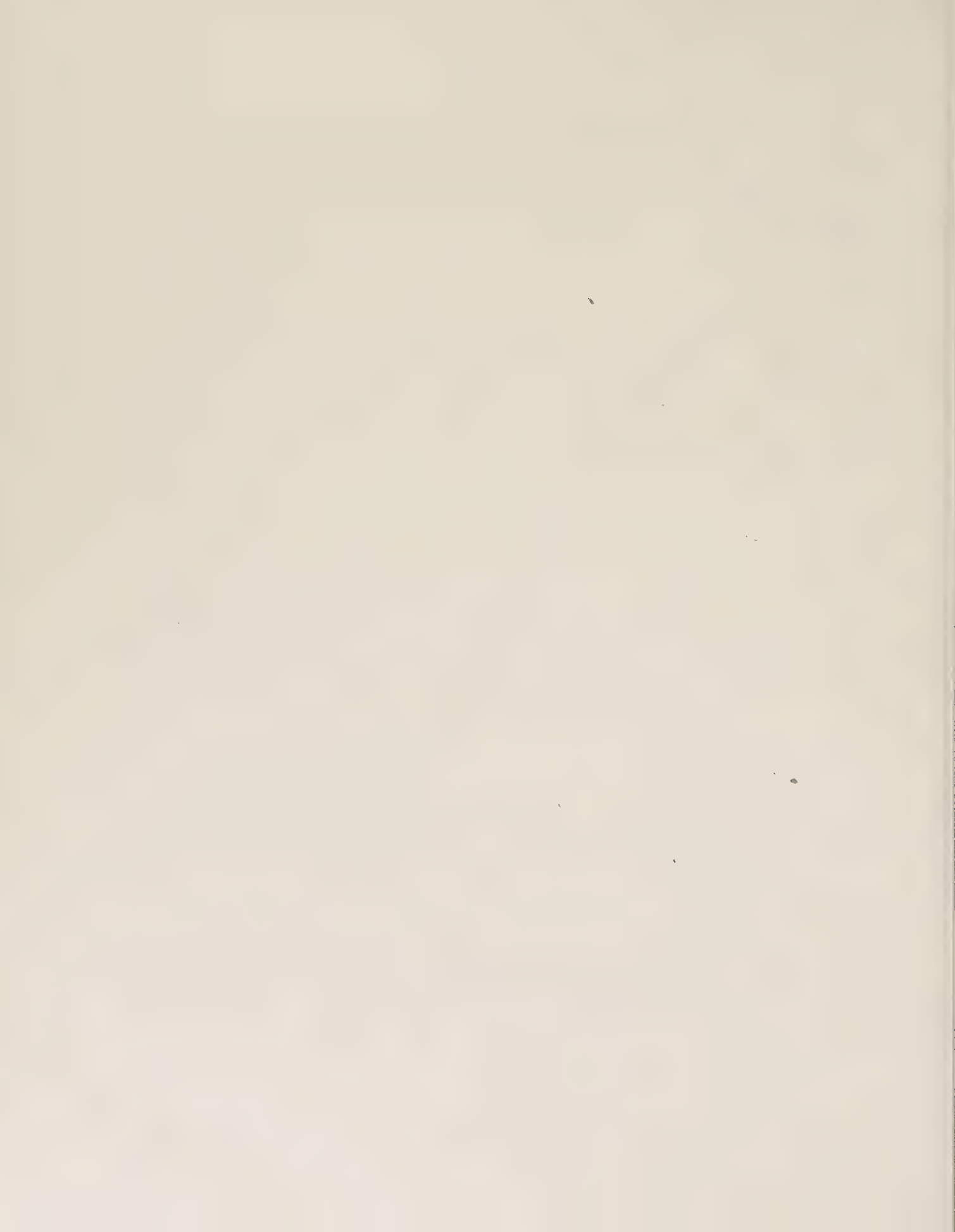
Nous avons étudié un grand nombre d'échantillons d'Antimoniure d'Indium de différentes provenances car nous avons eu de sérieuses difficultés à trouver des échantillons pour lesquels les quatre courbes $\Delta V = f(V_3)$, à T et B fixés, tracées pour les quatre orientations relatives possibles où $\vec{B}$ et $\vec{J}$ sont perpendiculaires, étaient des cubiques identiques entre elles. Sur une trentaine d'échantillons passés au crible de ce test, seulement deux y ont pleinement satisfait dans une large gamme de valeurs de la température et de l'induction magnétique.

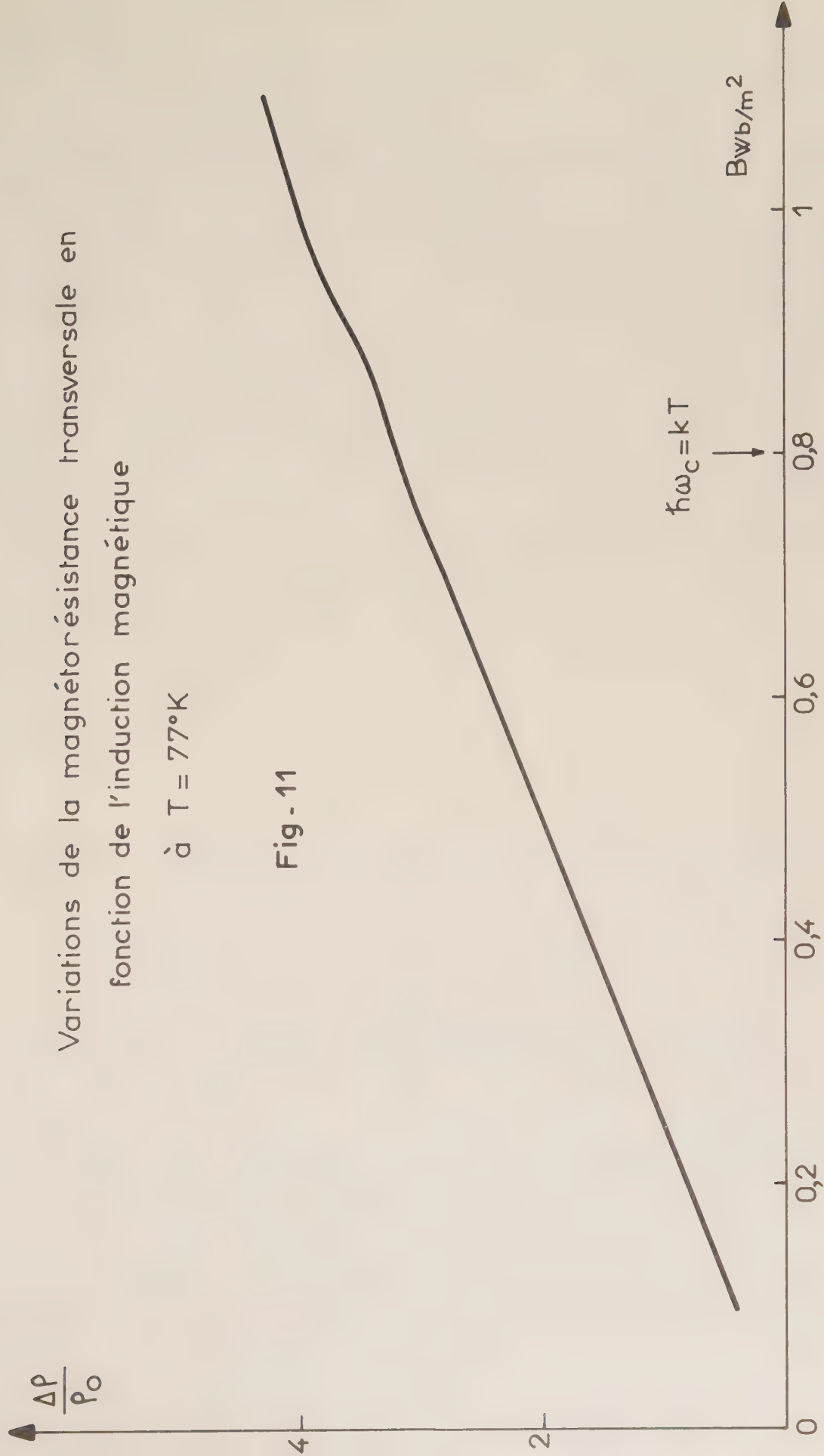
Les résultats dont nous faisons état ici ont été obtenus sur de l'Antimoniure d'Indium de type n non compensé au dire du fabricant. Les concentrations et mobilité mesurées à partir des coefficients de résistivité



Variations de la mobilité de Hall
avec la température

Fig - 10





et d'effet Hall sont respectivement et approximativement égales à 10^{14} cm^{-3} et $5.10^5 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ à la température de 77°K .

Les propriétés et anomalies de InSb étant bien connues, nous n'avons pas fait une étude systématique des coefficients associés aux phénomènes linéaires. Nous nous sommes contenté de vérifier que les variations de la résistivité et de la mobilité avec la température, entre $T_0 = 77^\circ\text{K}$ et $T_0 = 300^\circ\text{K}$, étaient en accord avec celles données par la littérature⁽¹⁷⁾ (cf. Fig. 10). Notons au passage que la mobilité varie sensiblement dans un rapport 4 entre 210°K et 77°K . En ce qui concerne la magnétorésistance, nous avons retrouvé le comportement anormal bien connu de InSb, à savoir : quand la condition $\omega_c \tau > 1$ est remplie, le coefficient de magnétorésistance $\Delta\rho/\rho_0$ est proportionnel à B, quelle que soit la valeur de $\hbar\omega_c$ par rapport à kT_0 (cf. Fig. 11).

Du point de vue théorique, nous savons que quand $\omega_c \tau \gg 1$, le coefficient de magnétorésistance, quand on s'intéresse à sa variation avec B, est de la forme (cf. (9) par exemple) :

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \sim B^2 \sigma_{xx}^{(0)}(B) \quad (12)$$

Si l'on introduit dans (12) les résultats du chapitre 5 concernant la limite quantique, on peut obtenir pour $\Delta\rho/\rho_0$ un comportement linéaire en B dans deux cas :

1°) lorsque les électrons interagissent avec les phonons optiques et quand la condition $\omega_q/\omega_c \gg 1$ est remplie ;

2°) lorsque les électrons interagissent avec les phonons acoustiques par l'intermédiaire du couplage piézoélectrique quand la condition $a_0^2 \gg 1$ est remplie.

Ainsi, en admettant que le comportement linéaire de $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ par rapport à B, observé expérimentalement, est explicable théoriquement quand $\hbar\omega_c \gg kT_0$, il ne l'est plus dans la limite classique quand $\hbar\omega_c \ll kT_0$. Ce résultat négatif est important pour nous, car nous verrons que les variations de r avec B ne pourront pas s'interpréter non plus quand $\hbar\omega_c \ll kT_0$.

b) Résultats des mesures du coefficient $r(B, T_0)$ dans la limite classique ($77 < T_0 < 205^\circ\text{K}$; $0,1 < B < 1,2 \text{ Wb/m}^2$) :

Nous avons extrait de nos courbes expérimentales présentant évidemment toutes les mêmes caractéristiques fort monotones, une courbe $\Delta V = f(V_3)$. (cf. Fig. 12). On retrouve le tracé par point auquel l'emploi du générateur d'impulsions nous a contraint. A chaque point expérimental, nous avons fait correspondre un point calculé de même abscisse et d'ordonnée égale à $(\Delta V)^{1/3}$. On constate que l'ensemble des points calculés s'alignent sur une droite passant par l'origine, ce qui confirme la loi $\Delta V \sim V_3^3$. La pente de cette droite, en tenant compte de l'étalonnage de chaque axe, fournit le coefficient r/l^2 exprimé en $(\text{Volts})^{-2}$ correspondant à la valeur de l'induction magnétique et à celle de la température pour lesquelles la cubique a été tracée.

Les variations du coefficient r avec l'induction magnétique B , pour différentes valeurs de la température sont représentées sur la figure 13. Les remarques essentielles déduites de ce réseau de courbes sont de trois ordres.

- Primo : A induction magnétique constante le coefficient r passe de valeurs négatives à positives quand la température évolue entre 77 et 205°K . La figure 14 schématise, pour différentes valeurs de B , les variations de r , non pas en fonction de T_0 , mais en fonction du paramètre $\alpha_0 = \frac{\hbar\omega_q}{2kT_0}$. Sur cette figure 11, on constate que la température d'annulation, T_a , de r est fixée par la condition :

$$\frac{\hbar\omega_q}{2kT_a} = 0,95$$

Comme dans l'Antimoniure d'Indium⁽¹⁸⁾, l'énergie des phonons optiques exprimée en degrés Kelvin vaut 260°K , on en déduit :

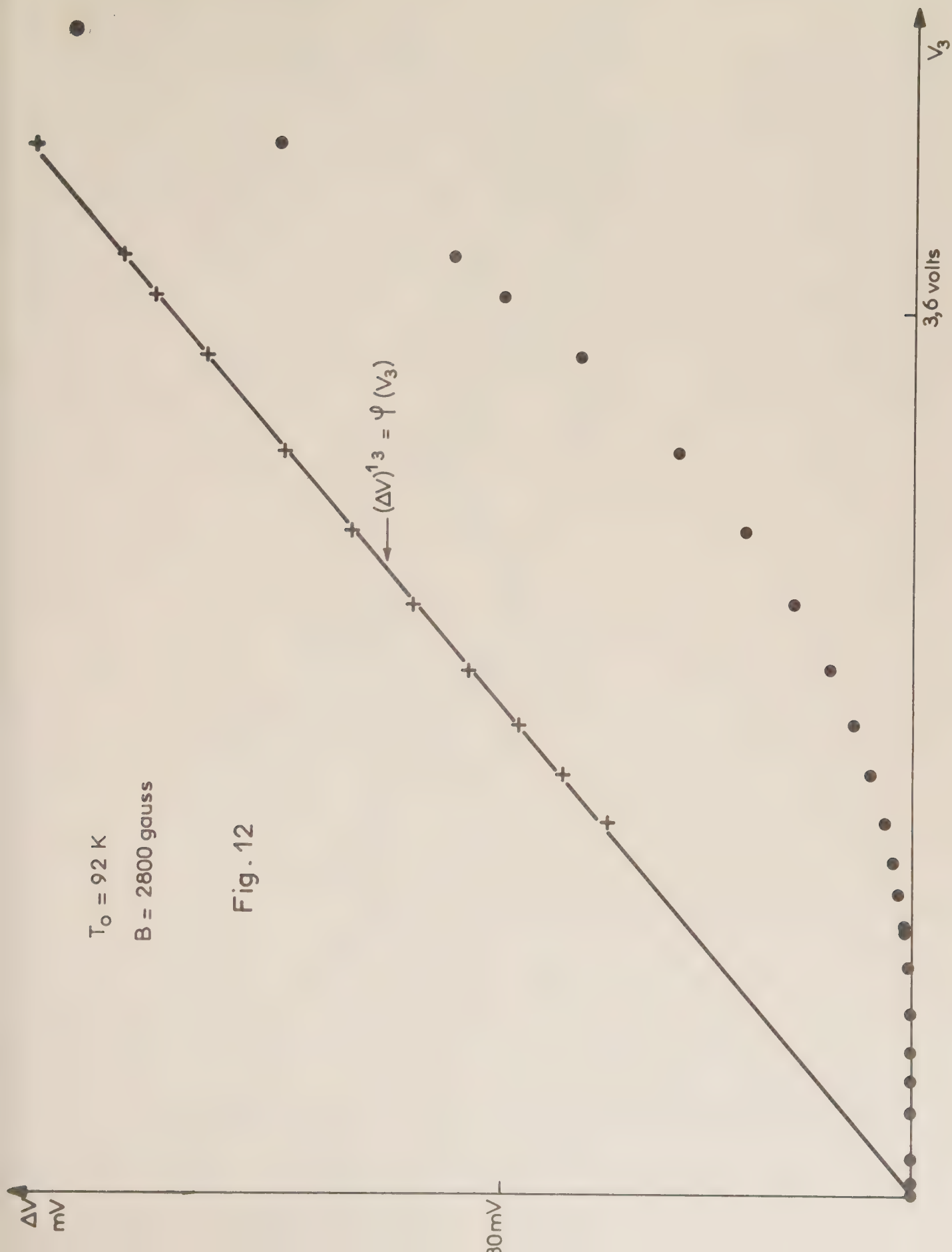
$$T_a \approx 135^\circ\text{K}$$

De plus, au-delà de la température d'annulation, quand r est négatif, sa valeur absolue passe par un maximum et décroît très rapidement ensuite en ayant tendance à s'annuler une seconde fois.

- Secondo : A température fixée le coefficient r est une fonction croissante de l'induction magnétique. Autrement dit, les déviations par rapport à la loi d'Ohm sont d'autant plus grandes que l'induction magnétique est élevée.

$T_0 = 92 \text{ K}$
 $B = 2800 \text{ gauss}$

Fig. 12



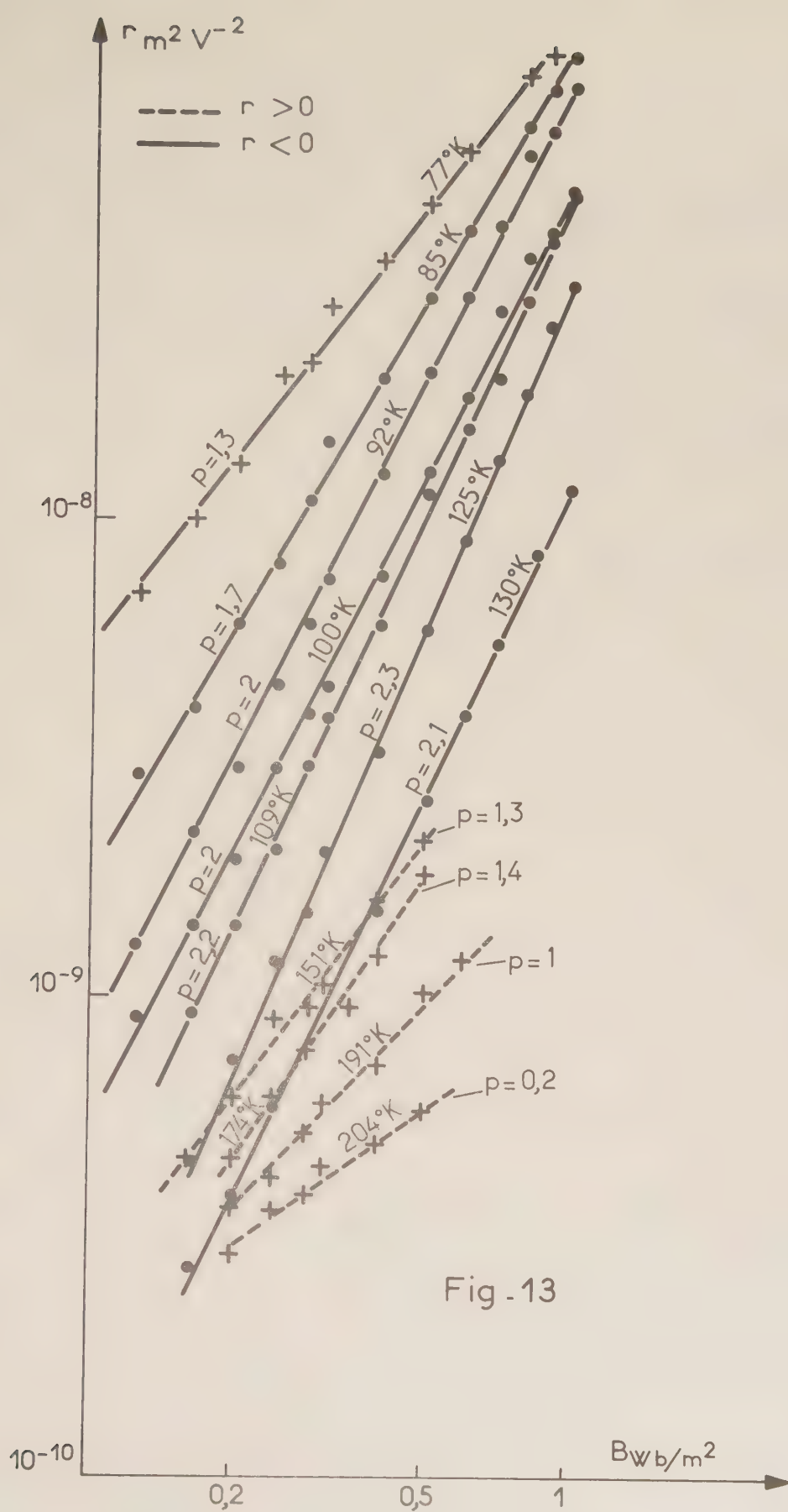
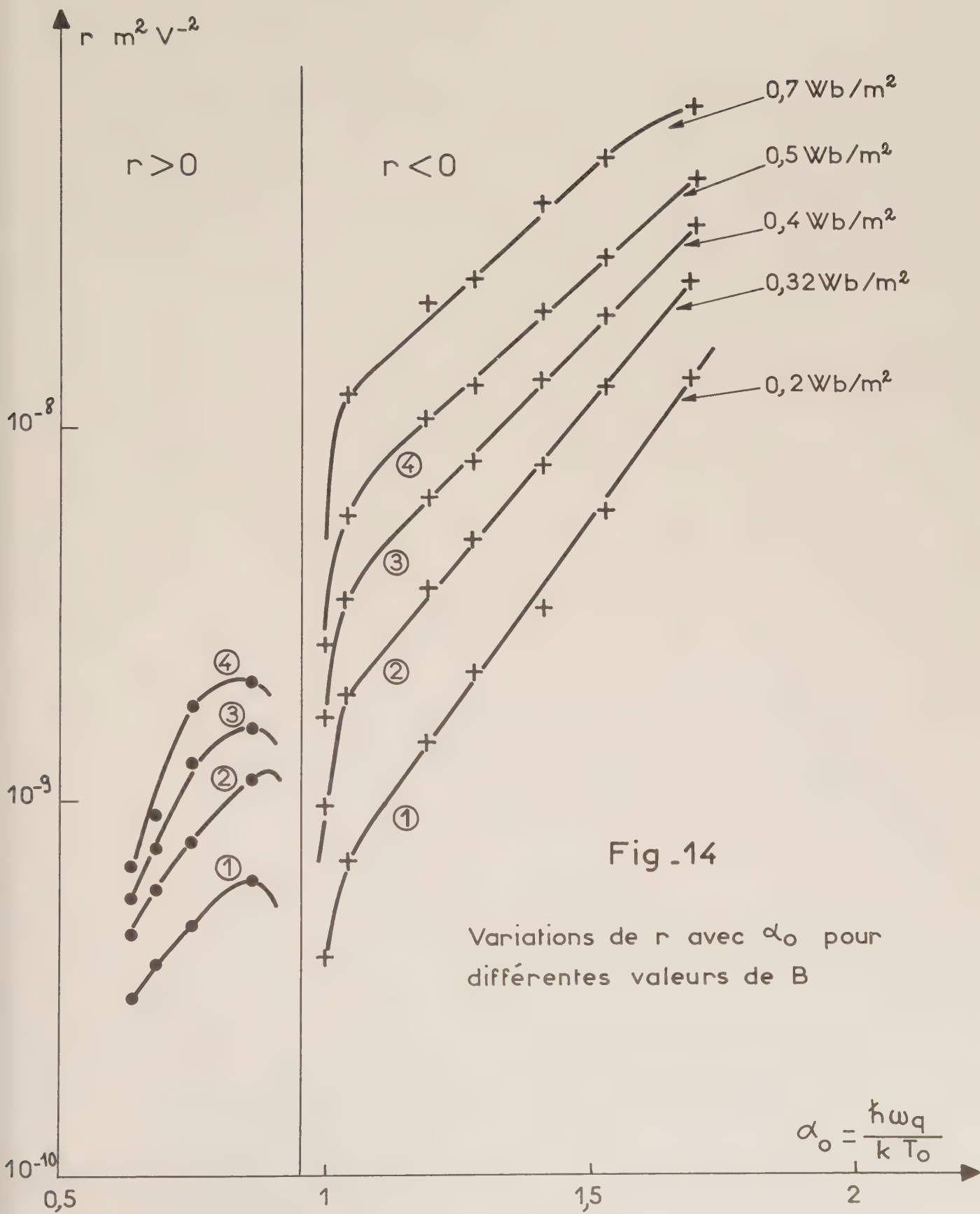


Fig. 13

Variations de r avec B pour différentes valeurs de T_0





Sur la figure 11 on constate que les lois de variation de r avec B sont assez bien représentées par des fonction puissances :

$$r \sim B^{n(T_0)}$$

où l'exposant n est toujours positif et dépend de la température. Ce dernier varie avec la température et sa valeur absolue passe par deux maximum différents situés, le premier, dans la région où r est < 0 , le second dans la région où r est > 0 .

- Tertio : Les remarques qui suivent ne découlent pas des figures 12 ou 13 mais en expliquent le caractère parfois incomplet. Tout d'abord au voisinage de la température T_a , les mesures de r deviennent impossibles à effectuer pour deux raisons :

1°) r devient très petit ;

2°) les courbes $\Delta V = f(V_3)$ perdent leur caractère cubique.

Des mesures au voisinage de T_a présenteraient surtout de l'intérêt pour une étude de l'exposant $n(T_0)$, mais cette étude n'est pas la plus urgente à mener car nous verrons que même pour T_0 différent de T_a nous ne savons pas expliquer la loi en $B^{n(T_0)}$.

Par ailleurs pour les températures supérieures à T_a , nous n'avons pas dépassé des valeurs de B égales à $0,7 \text{ Wb/m}^2$; ceci provient du fait que dans la région des champs électriques où la loi d'Ohm n'est plus vérifiée, des instabilités de courants sont produites par des inductions magnétiques supérieures à $0,7 \text{ Wb/m}^2$ et empêchent la mesure de r .

V - INTERPRETATION DES RESULTATS EXPERIMENTAUX

Examinons tout d'abord les variations de r avec l'induction magnétique. D'après les remarques qui suivent la formule (11), les résultats théoriques des chapitres 4 et 5 prédisent soit que r est indépendant de B en limite classique, soit que r décroît avec B en limite quantique. Ces conclusions sont donc en complet désaccord avec les résultats expérimentaux. En se rappelant que, dans l'étude des phénomènes linéaires, les variations de la magnétorésistance avec l'induction magnétique n'ont pu être interprétées dans la région où $\omega_c \tau \gg 1$ et $\hbar \omega_c \ll kT_0$, ceci ne nous surprend pas trop. Nous abandonnons donc pour l'instant l'idée de faire coïncider théorie et

expérience sur ce point particulier. Notons simplement que l'étude de r en limite quantique, quand $\hbar\omega_c \gg kT_0$, devrait nous éclairer mais que les mesures expérimentales sont totalement gênées par l'apparition des instabilités électriques dont nous avons déjà parlé.

Passons maintenant à l'analyse des variations de r avec la température, où nous allons rencontrer plus de satisfaction. Nous avons vu que les valeurs expérimentales de r passent de valeurs négatives à positives quand T_0 croît et que $r = 0$ pour $T_0 \approx 135^\circ\text{K}$.

D'après (11), r est proportionnel à β et s'annule donc en même temps que lui. Dans le tableau récapitulatif des différents résultats théoriques que nous avons obtenus, il existe une loi de variation de β , en limite classique, telle que β s'annule en passant de valeurs négatives à positives quand T_0 augmente. Il s'agit du β obtenu dans le cadre de la seconde théorie lorsque les électrons interagissent avec les phonons optiques (notons au passage que le β de la première théorie, pour le même type d'interaction, s'annule aussi, mais il passe de valeurs positives à négatives quand T_0 croît, ce qui est contraire aux données expérimentales). Examinons donc en détail ce que le couplage électrons-phonons optiques en limite classique prédit. D'après (11), (4-54) et (4-66), le coefficient r a pour expression :

$$r = \frac{3\pi}{160} \frac{1}{F_0^2} \frac{[5 K_2(\alpha_0) - 9 K_0(\alpha_0)] [K_2(\alpha_0) - 9 K_0(\alpha_0)]}{K_1^2(\alpha_0) K_0(\alpha_0) [K_2(\alpha_0) - K_0(\alpha_0)]} \frac{\text{sh}^2 \alpha_0}{\alpha_0^2} \quad (13)$$

où nous avons introduit la quantité F_0 homogène à un champ électrique et définie par :

$$F_0 = \frac{m D^{(0)}}{2\pi e \hbar^2}$$

Dans InSb, $F_0 = 34 \cdot 10^3 \text{ V/m}$

Nous n'avons pas fait figurer ici la courbe déduite de (13) et représentant les variations de r en fonction de α_0 . En effet, bien que cette courbe ait un air de ressemblance avec les courbes expérimentales de la figure 12, la température T_a pour laquelle r s'annule en passant de valeurs négatives à positives déduite de (13) diffère par trop de celle mesurée

(cf. l'étude du produit $(5 K_2 - 9K_0) (K_2 - 9K_0)$ faite au § 4.V) puisque :

$$(T_a)_{\text{théorique}} \approx 45^\circ\text{K} \quad \text{tandis que} \quad (T_a)_{\text{exp}} \approx 135^\circ\text{K}$$

De plus, les valeurs numériques de r , déduites de (13), sont supérieures d'un facteur 10^2 à 10^3 aux valeurs expérimentales.

A ce stade, nous pouvons, dans le but d'améliorer l'accord entre théorie et expérience, introduire un élément nouveau. En effet, nous savons, d'après l'étude des phénomènes linéaires⁽¹⁵⁾ et (16), que les phonons optiques ne sont pas les seuls à interagir avec les électrons ; les phonons acoustiques, par l'intermédiaire du couplage piézoélectrique, jouent aussi un rôle. Nous sommes donc conduit à rechercher une expression de r en présence de deux interactions pour les électrons.

En remontant aux sources des théories exposées aux chapitres 2 et 3, on peut aisément démontrer que dans le cas où les électrons interagissent avec deux types de phonons, les composantes de $\langle \vec{J} \rangle$, calculées en second ordre par rapport aux coefficients de couplage, s'écrivent :

$$\langle J_y \rangle = ne \frac{E}{B} \quad \text{et} \quad \langle J_x \rangle = (\sigma_1 + \sigma_2) \left[1 + \frac{\sigma_1 \beta_1 + \sigma_2 \beta_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right] E \quad (14)$$

Les coefficients σ_1 et σ_2 sont les coefficients de conductivité $\sigma_{xx}^{(0)}$ associés à chacune des deux interactions ; de même β_1 et β_2 sont les coefficients caractérisant les déviations par rapport à la loi d'Ohm, associés à chaque interaction.

En partant de (14), et à l'aide d'un raisonnement analogue à celui du § II de ce chapitre, on trouve que le coefficient r s'exprime en fonction de $\sigma_1, \sigma_2, \beta_1, \beta_2$ sous la forme :

$$r = \frac{n^2 e^2}{B^2} \frac{\sigma_1 \beta_1 + \sigma_2 \beta_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^3} \quad (15)$$

Appliquons (15) au cas qui nous intéresse où les électrons interagissent avec les phonons optiques et avec les phonons acoustiques par l'intermédiaire du couplage piézoélectrique. En nous reportant au tableau de la fin du chapitre 5, nous obtenons :

$$r = - \frac{3\pi}{160} \frac{1}{F_o} \frac{\alpha_o}{2} \frac{\frac{\hbar\omega_q^2}{ms^3} \frac{D^{(1)}}{D^{(0)}} + \frac{\alpha_o^3}{\text{sh}\alpha_o} \frac{K_1(\alpha_o)}{K_o(\alpha_o)} \frac{[5K_2(\alpha_o) - 9K_o(\alpha_o)] [K_2(\alpha_o) - 9K_o(\alpha_o)]}{K_2(\alpha_o) - K_o(\alpha_o)}}{\left[\frac{\omega_q}{s} \frac{D^{(1)}}{D^{(0)}} + \frac{\alpha_o^2}{\text{sh}\alpha_o} K_1(\alpha_o) \right]^3} \quad (16)$$

La formule (16) fait évidemment intervenir les paramètres $D^{(1)}$, $D^{(0)}$ (ou F_o) qui fixent l'intensité de chacun des couplages et qui ne sont pas connus de façon précise dans InSb. Néanmoins, nous pouvons tracer des courbes $r(\alpha_o)$, à partir de (16), pour différentes valeurs du rapport $\frac{D^{(1)}}{D^{(0)}}$.

Après quelques tâtonnements on constate qu'en choisissant pour la quantité sans dimension :

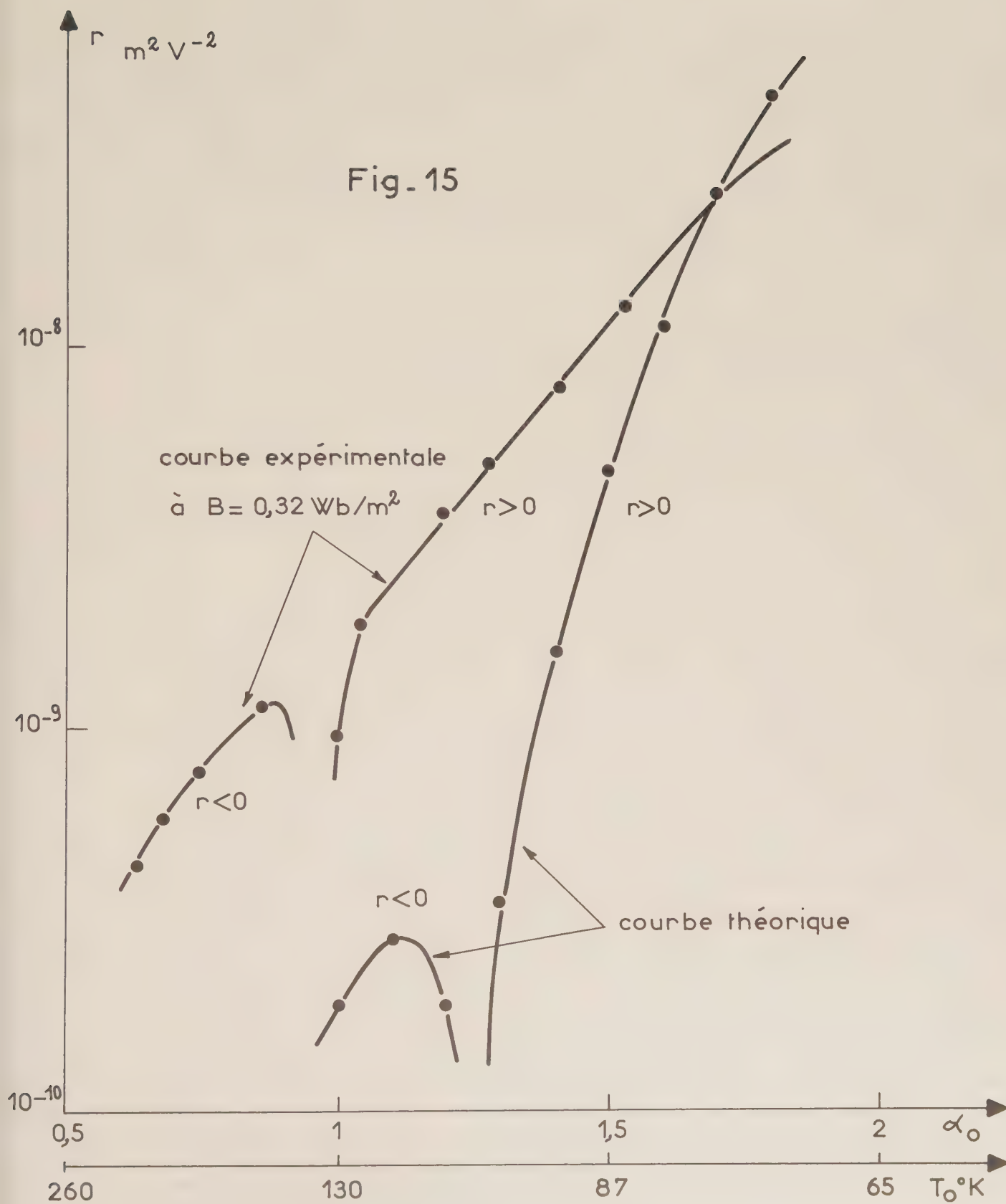
$$A = 5 \frac{\hbar\omega_q^2}{ms^2} \frac{D^{(1)}}{D^{(0)}} \quad (17)$$

une valeur voisine de 9, la courbe représentative de la fonction $r(\alpha_o)$ (cf. Fig. 15) définie par (16) s'insère approximativement dans le réseau de courbes expérimentales de la figure 11 ; il existe toutefois une différence notable entre les deux températures d'annulation de r , théorique et expérimentale, puisque :

$$(T_a)_{\text{exp}} = 135^\circ\text{K} \quad \text{tandis que} \quad (T_a)_{\text{théorie}} \approx 105^\circ\text{K}$$

Donc en choisissant $A = 9$ (c.a.d. $D^{(1)}/D^{(0)} \approx 2 \cdot 10^{-14} \text{ m}$), nous nous rendons compte de l'annulation de r à une "température théorique" qui s'est nettement rapprochée de la "température expérimentale" T_a par rapport au cas où nous ne considérons que l'interaction électrons-phonons optiques. De plus, l'allure des variations expérimentales de r avec α_o et notamment la tendance, pour r , à s'annuler une seconde fois au-delà de 300°K ($\alpha_o \sim 0,4$) est bien traduite par la loi 16. Enfin, les ordres de grandeur des valeurs de r théoriques et expérimentales concordent grossièrement pour certaines températures.

Fig. 15





Il reste à s'assurer, par ailleurs, que le choix $A = 9$ ne conduit pas à des aberrations en ce qui concerne les phénomènes linéaires. A cet effet, reprenons les formules (4-32) et (4-54). On en déduit que les mobilités électroniques sont égales à :

$$\mu_1 = e \frac{3\pi^{3/2}}{2^{3/2}} \frac{\hbar^3}{m^{3/2} (kT_0)^{1/2} D^{(1)}} \quad \text{dans le cas de l'interaction électrons-phonons acoustique, couplage piézo-électrique}$$

$$\text{et à } \mu_2 = e \frac{3\pi^{3/2}}{\sqrt{2}} \frac{\hbar^2 (kT_0)^{1/2}}{m^{3/2} D^{(0)} K_1(\alpha_0)} \frac{1}{\alpha_0} \quad \text{dans le cas de l'interaction électrons-phonons optiques.}$$

La mobilité résultante, en présence des deux interactions, vaut donc :

$$\mu = \mu_1 \frac{1}{1 + \frac{D^{(1)}}{D^{(0)}} \frac{1}{s\omega_q} \frac{1}{K_1(\alpha_0)} \frac{sh\alpha_0}{\alpha_0^2}} \quad (18)$$

et compte tenu de la valeur du rapport $D^{(1)}/D^{(0)} \approx 2 \cdot 10^{-14}$ quand $A = 9$, le dénominateur du second membre de (18) vaut pratiquement 1 ; en conséquence $\mu \approx \mu_1$ et la contribution à la mobilité de l'interaction avec les phonons acoustiques par l'intermédiaire du couplage piézoélectrique est masquée par celle de l'interaction avec les phonons optiques. Ce point est confirmé par des mesures récentes⁽¹⁵⁾, où des phénomènes de magnéto-résistance oscillatoire dont seuls les phonons optiques peuvent être responsables⁽¹³⁾, ont été observés à des températures voisines de celle de l'Azote liquide. Rappelons nous aussi qu'en extrême limite quantique, les mesures de magnéto-résistance montrent que celle-ci croît linéairement avec B, en accord avec les prévisions théoriques déduites du couplage avec les phonons optiques (cf. (5.51)).

En résumé, de cette confrontation théorie-expérience, nous pouvons faire ressortir les aspects suivants :

- Du point de vue expérimental, dans la limite classique des fortes inductions magnétiques ($\omega_c \tau \gg 1$, $\hbar\omega_c \ll kT_0$), les premières déviations par rapport à la loi d'Ohm passent de valeurs positives à négatives quand la température croît à partir de 77°K. Dans la région où r est négatif

($T_0 > 135^\circ\text{K}$), il varie rapidement en passant par un maximum et, au-delà, en ayant tendance à s'annuler une seconde fois pour prendre des valeurs négatives.

- La seconde théorie exposée au chapitre 4 interprète qualitativement l'ensemble de ces résultats ; le couplage avec les phonons optiques est le responsable essentiel des annulations de r avec la température. Toutefois, l'interaction avec les phonons acoustiques par l'intermédiaire du couplage piézoélectrique joue un rôle secondaire non négligeable. Grâce à ce dernier, les valeurs numériques de r et des températures d'annulation ne sont pas trop éloignées des résultats expérimentaux.

Il subsiste évidemment des désaccords entre théorie et expérience, notamment en ce qui concerne les variations de r avec l'induction magnétique. Cependant, nous avons réussi à interpréter le changement de signe de r et l'allure générale de ses variations avec la température ; ce résultat fixera la limite présente de notre contribution à l'étude théorique et expérimentale des phénomènes d'électrons tièdes.

CHAPITRE 7

CONCLUSION

Nous venons d'exposer deux théories quantiques concernant les faibles déviations par rapport à la loi d'Ohm dans les semiconducteurs soumis à de fortes inductions magnétiques et nous les avons confrontées avec des expériences faites sur l'Antimoniure d'Indium. Il ressort de la comparaison théorie-expérience que la première théorie, reposant sur une généralisation de la méthode de Kubo, conduit à des résultats en désaccord profond avec ceux déduits des mesures expérimentales. Si nous en avons maintenu l'exposé c'est essentiellement pour montrer, a posteriori, que les échanges énergétiques (champ électrique $\rightarrow$ électrons $\rightarrow$ phonons) ne peuvent pas être négligés, même quand on étudie les premières déviations par rapport à la loi d'Ohm ; de plus, il nous coûtait peu du point de vue du temps et de la place de présenter les résultats de cette première théorie, tant la ressemblance formelle avec la seconde était grande.

Le point de départ de la seconde théorie a un caractère plus phénoménologique que celui de la première. Nous y avons introduit un paramètre -la température T des électrons- que nous avons déterminé par des considérations énergétiques non prises en compte dans la première théorie. Cette seconde théorie nous a permis de retrouver un résultat connu, d'en déduire de nouveaux et d'interpréter partiellement nos mesures. Dans les limites classiques et quantiques et pour trois types d'interaction électrons-phonons, nous avons obtenu les différentes expressions du coefficient β caractérisant les faibles déviations par rapport à la loi d'Ohm (cf. tableaux fin du chapitre 5).

En pratique, ce n'est pas le coefficient β que nous avons mesuré, mais un certain coefficient r directement lié à β (cf. (6.11)). La grandeur r est définie pour des échantillons, de forme parallélépipédique allongée, soumis à un champ électrique $\vec{E}$ de composante longitudinale E_x et à une induction magnétique élevée perpendiculaire à $\vec{E}$. Quand, aux faibles valeurs de E , la loi d'Ohm est vérifiée, l'échantillon présente une résistance indépendante de E égale à R_0 . Quand l'intensité de E augmente, la résistance R de l'échantillon dépend de E_x et il existe un intervalle de valeurs de E_x tel que R varie suivant la loi : $R = R_0 (1 + r E_x^2)$.

Les mesures du coefficient r effectuées entre 77 et 210°K sur l'Antimoniure d'Indium de type n très pur ont présenté de nombreuses difficultés. Nous avons dû mettre au point un appareillage mélangeant les techniques des courants impulsionnels et continus. Nous avons ainsi constaté que, dans la limite classique, r croît avec l'induction magnétique en suivant une loi en $B^{n(T_0)}$. Ce résultat n'a pu être interprété ; il est à rapprocher de celui concernant les variations du coefficient de magnétorésistance linéaire avec B qui n'est pas expliqué non plus.

L'aspect positif de notre étude réside dans l'interprétation des variations expérimentales de r avec la température à l'aide des conclusions de notre seconde théorie et la mise en évidence du rôle prépondérant des phonons optiques dans les phénomènes non linéaires intervenant dans InSb. En effet, du point de vue théorique lorsque d'une part : les conditions définissant la limite classique sont réalisées, d'autre part : les électrons interagissent avec les phonons optiques, nous avons établi que le coefficient r doit s'annuler en passant de valeurs négatives à positives quand la température croît ; de plus seul ce type d'interaction conduit à un tel résultat qualitatif. Nos mesures sur l'Antimoniure d'Indium nous ont permis d'observer un tel comportement de r , qui montre clairement que les phonons optiques jouent un rôle fondamental dans les phénomènes d'électrons tièdes se produisant dans InSb. Cependant l'accord théorie-expérience peut être amélioré du point de vue quantitatif en tenant compte de l'existence d'une seconde interaction entre les électrons et les phonons acoustiques par l'intermédiaire du couplage piézoélectrique. Quand on tient compte de ces deux types d'interaction, les prévisions théoriques concernant la température d'annulation et l'ordre de grandeur de r sont relativement bien vérifiées.

Il reste à noter que notre étude n'est pas complète. Du point de vue théorique, pour les gaz d'électrons non dégénérés, interagissant avec les phonons optiques, nous pensons montrer que le coefficient β oscille en fonction de l'induction magnétique, comme c'est le cas de la magnétorésistance ordinaire. De plus, maintenant que nous avons mis au point nos techniques de calculs, nous pouvons analyser le cas des gaz d'électrons dégénérés. De même notre étude expérimentale présente des lacunes. En particulier l'étude de la limite quantique dans la gamme des températures

voisines de celle de l'Azote liquide (où nous pouvons espérer que les fortes inductions magnétiques ne produisent pas d'instabilités électriques empêchant les mesures de r) devrait nous apporter d'utiles compléments sans nécessiter de profondes modifications de l'appareillage électronique.

ANNEXE 1

CALCUL DE $\langle J_- \rangle^{(3)}$ (première théorie)

1°) Développement de $\langle J_- \rangle^{(3)}$ au second ordre en λ

A partir des équations (2-34) et (2-38), et en utilisant la propriété de permutation des opérateurs sous le signe trace, on obtient :

$$\langle J_- \rangle^{(3)} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{eE}{i\hbar} \right)^3 \text{Tr} \int_0^\infty dt_1 \int_0^\infty dt_2 \int_0^\infty dt_3 e^{-s(3t_1+2t_2+t_3)} \chi^x e^{\frac{H^x t_2}{i\hbar}} \chi^x e^{\frac{H^x t_3}{i\hbar}} \chi^x \{p_0\} \cdot e^{-\frac{H^x t_1}{i\hbar}} \{J_- \} \quad (1)$$

Considérons le terme

$$A(s) = \int_0^\infty dt_1 e^{-3st_1} e^{-\frac{H^x t_1}{i\hbar}} \{J_- \} \quad (2)$$

qui intervient dans (1) et apparaît comme une transformée de Laplace.

Appliquons le théorème établissant une relation entre les transformées de Laplace d'une fonction et de sa dérivée

$$3s A(s) = J_- - \frac{1}{i\hbar} \int_0^\infty dt_1 e^{-3st_1} e^{-\frac{H^x t_1}{i\hbar}} \{[H, J_-]\} \quad (3)$$

Le commutateur $[H, J_-]$ de (3) se calcule à partir des expressions respectives de H_e , H_p , λH_{ep} et J_- , données par les formules (2-13), (2-15), (2-16) et (2-40) ; plus généralement nous obtenons :

$$[H, J_\pm] = \pm \hbar \omega_c J_\pm + \lambda [H_{ep}, J_\pm] \quad (4)$$

avec

$$\lambda [H_{ep}, J_\pm] = \pm i e \frac{\hbar}{m} \sum_{v, v'} \sum_{q, j} (q_y \pm i q_x) \gamma_{vv'}(q) a_v^+ a_v b_q^j \quad (5)$$

Reportons d'abord (4) dans (3) ; nous obtenons une expression nouvelle pour $A(s)$ qui introduite dans (1) conduit à :

$$\begin{aligned} \langle J_- \rangle^{(3)} = \lim_{s \rightarrow 0} & \left\{ \left(\frac{eE}{i\hbar} \right)^3 \text{Tr} \int_0^\infty \int_0^\infty dt_2 dt_3 e^{-s(2t_2+t_3)} \chi^x e^{H^x \frac{t_2}{i\hbar}} \chi^x e^{H^x \frac{t_3}{i\hbar}} \chi^x \{\rho_0\} \cdot \frac{J_-}{3s+i\omega_c} \right. \\ & - \frac{\lambda}{i\hbar} \left(\frac{eE}{i\hbar} \right)^3 \text{Tr} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty dt_1 dt_2 dt_3 e^{-s(3t_1+2t_2+t_3)} \\ & \left. \chi^x e^{H^x \frac{t_2}{i\hbar}} \chi^x e^{H^x \frac{t_3}{i\hbar}} \chi^x \{\rho_0\} \cdot e^{-H^x \frac{t_1}{i\hbar}} \left\{ \frac{[H_{ep}, J_-]}{3s+i\omega_c} \right\} \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

Montrons que le premier terme du second membre de (6) est nul. Grâce à la propriété de permutation des opérateurs sous le signe trace, ce premier terme est proportionnel à :

$$\text{Tr} \chi^x e^{H^x \frac{t_2}{i\hbar}} \chi^x e^{H^x \frac{t_3}{i\hbar}} \chi^x \{\rho_0\} \cdot J_- = \text{Tr} e^{-H^x \frac{t_2}{i\hbar}} \{[J_-, \chi]\} \cdot \chi^x e^{H^x \frac{t_3}{i\hbar}} \chi^x \{\rho_0\} \quad (7)$$

Or, d'une part le commutateur $[J_-, \chi]$, d'après les expressions (2-26) et (2-40) des opérateurs χ et J_- , est un scalaire et d'autre part

$$\text{Tr} \chi^x e^{H^x \frac{t_3}{i\hbar}} \chi^x \{\rho_0\} = \text{Tr} [\chi, e^{H^x \frac{t_3}{i\hbar}} \chi^x \{\rho_0\}] = 0 \quad (8)$$

Donc $\langle J_- \rangle^{(3)}$ se réduit au second terme de (6) ; nous avons ainsi réussi à faire apparaître le paramètre λ en facteur dans son expression. Si nous désirons calculer $\langle J_- \rangle^{(3)}$ à l'ordre un par rapport à λ , nous devons remplacer dans (6) H par $H_0 = H_e + H_p$. Il est alors facile de montrer, du fait que H_{ep} n'est pas diagonal dans la base de H_p , qu'un tel calcul conduit à un résultat nul.

Notre point de départ pour ce qui suit est donc l'expression suivante de $\langle J_- \rangle^{(3)}$:

$$\begin{aligned} \langle J_- \rangle^{(3)} = & - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\lambda}{i\hbar} \left(\frac{eE}{i\hbar} \right)^3 \text{Tr} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty dt_1, dt_2, dt_3 e^{-s(3t_1+2t_2+t_3)} \\ & \chi^x e^{H^x \frac{t_2}{i\hbar}} \chi^x e^{H^x \frac{t_3}{i\hbar}} \chi^x \{\rho_0\} \cdot e^{-H^x \frac{t_1}{i\hbar}} \left\{ \frac{[H_{ep}, J_-]}{3s + i\omega_c} \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

Nous allons faire apparaître comme précédemment un second facteur λ dans $\langle J_- \rangle^{(3)}$. Pour cela considérons l'expression :

$$B(s) = \int_0^\infty dt_3 e^{-st_3} e^{H^x \frac{t_3}{i\hbar}} \chi^x \{\rho_0\} \quad (10)$$

Nous la transformons en utilisant la relation habituelle

$$\chi^x \{\rho_0\} = i\hbar \int_0^{(kT_0)^{-1}} du e^{-uH^x} \{V_x \rho_0\} \quad (11)$$

où V_x est la composante suivant l'axe ox de l'opérateur vitesse totale du gaz électronique qui peut être remplacé par :

$$V_x = -\frac{\lambda}{2e} (J_+ + J_-) \quad (12)$$

Dans ces conditions $B(s)$ se décompose en

$$B(s) = \frac{1}{2} [B_+(s) + B_-(s)] \quad (13)$$

avec

$$B_\pm(s) = -\frac{i\hbar}{e} \int_0^\infty dt_3 e^{-st_3} \int_0^{(kT_0)^{-1}} du e^{-uH^x} e^{H^x \frac{t_3}{i\hbar}} \{J_\pm \rho_0\} \quad (14)$$

Comme $A(s)$, $B_\pm(s)$ est considéré comme une transformée de Laplace à laquelle on applique le théorème déjà utilisé sur les dérivées.

$$sB_\pm(s) = -\frac{i\hbar}{e} \int_0^{(kT_0)^{-1}} du e^{-uH^x} \{J_\pm \rho_0\} - \frac{1}{e} \int_0^\infty dt_3 e^{-st_3} \int_0^{(kT_0)^{-1}} du e^{-uH^x} e^{H^x \frac{t_3}{i\hbar}} \{[H, J_\pm] \rho_0\} \quad (15)$$

Reportons tout d'abord (4) dans (15) ; nous obtenons pour B(s) une expression qui, introduite dans (9), conduit à :

$$\begin{aligned}
 \langle J_- \rangle^{(3)} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\lambda}{2} \frac{e^{2E} 3}{(i\hbar)^3} \text{Tr} \int_0^{(kT_0)^{-1}} du \int_0^\infty dt_1 dt_2 e^{-s(3t_1+2t_2)} \\
 &\quad \chi^x e^{H^x \frac{t_2}{i\hbar}} \chi^x e^{-uH^x} \left\{ \left[\frac{J_+}{s+i\omega_0} + \frac{J_-}{s-i\omega_0} \right] \rho_0 \right\} \cdot e^{-H^x \frac{t_1}{i\hbar}} \left\{ \frac{[H_{ep}, J_-]}{3s+i\omega_0} \right\} \\
 &+ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\lambda^2}{2i\hbar} \frac{e^{2E} 3}{(i\hbar)^3} \text{Tr} \int_0^{(kT_0)^{-1}} du \int_0^\infty dt_1 dt_2 dt_3 e^{-s(3t_1+2t_2+t_3)} \\
 &\quad \chi^x e^{H^x \frac{t_2}{i\hbar}} \chi^x e^{-uH^x} e^{H^x \frac{t_3}{i\hbar}} \left\{ \left[\frac{[H_{ep}, J_+]}{s+i\omega_0} + \frac{[H_{ep}, J_-]}{s-i\omega_0} \right] \rho_0 \right\} \cdot \\
 &\quad \cdot e^{-H^x \frac{t_1}{i\hbar}} \left\{ \frac{[H_{ep}, J_-]}{3s+i\omega_0} \right\}
 \end{aligned} \tag{16}$$

Dans (16), $\langle J_- \rangle^{(3)}$ apparaît comme la somme de deux termes ; le premier contient λ en facteur, tandis que le second contient λ^2 . Il s'avère que le premier développé au second ordre en λ ne contribue pas à $\langle J_- \rangle^{(3)}$; la démonstration de ce résultat ne présente pas de difficulté mais les calculs sont longs et ne sont pas reproduits ici. Pour obtenir $\langle J_- \rangle^{(3)}$ au second ordre en λ , il suffit donc d'évaluer le second terme de (16) dans lequel H est remplacé par $H_0 = H_e + H_p$. L'opérateur densité $\rho_0(H)$ devient alors égal à :

$$\rho_0(H_0) = \frac{\exp - (H_0 - \xi \hat{N}) / kT_0}{\text{Tr} \exp - (H_0 - \xi \hat{N}) / kT_0} \tag{17}$$

2°) Expression finale de $\langle J_- \rangle$ (3)

Remplaçons dans le terme restant de $\langle J_- \rangle$ (3) tous les opérateurs intervenant dans les exponentielles par leur expression en seconde quantification. L'utilisation systématique du théorème de Bloch-de Dominicis⁽⁵⁾ sur les valeurs moyennes de produits d'opérateurs de création et d'annihilation permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \langle J_- \rangle^{(3)} &= \lim_{s \rightarrow 0} i\hbar \frac{e^4 E^3}{2^2 m \omega_c^2} \sum_{v, v'} \sum_{\mu, \mu'} \sum_{q, j} q_y (q_y + i q_x) f_v^0 (1 - f_\mu^0) N_q^j \\ &\quad \frac{e^{\frac{\epsilon_{v\mu} - (-1)^j \hbar \omega_q}{kT_0}} - 1}{\epsilon_{v\mu} - (-1)^j \hbar \omega_q} \frac{\gamma_{\mu v}(q)}{\epsilon_{\mu v} - (-1)^j \hbar \omega_q + i\hbar s} \left\{ \frac{\gamma_{vv'}(-q) x_{v'\mu} x_{\mu'\mu}}{(\epsilon_{v\mu} - (-1)^j \hbar \omega_q + 2i\hbar s) (\epsilon_{vv'} - (-1)^j \hbar \omega_q + 3i\hbar s)} \right. \\ &\quad - \frac{\gamma_{\mu'v'}(-q)}{\epsilon_{\mu'v'} - (-1)^j \hbar \omega_q + 3i\hbar s} \left[\frac{x_{v'\mu} x_{v\mu'}}{\epsilon_{\mu'\mu} - (-1)^j \hbar \omega_q + 2i\hbar s} + \frac{x_{v\mu} x_{v'\mu}}{\epsilon_{vv'} - (-1)^j \hbar \omega_q + 2i\hbar s} \right] \\ &\quad \left. + \frac{\gamma_{v'\mu}(-q) x_{\mu'v'} x_{v\mu'}}{(\epsilon_{\mu'\mu} - (-1)^j \hbar \omega_q + 2i\hbar s) (\epsilon_{v'\mu} - (-1)^j \hbar \omega_q + 3i\hbar s)} \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

Les notations suivantes ont été utilisées :

$$\epsilon_{v\mu} = \epsilon_v - \epsilon_\mu \quad (19)$$

$$f_v^0 = \text{Tr } \rho_0(H_0) a_v^\dagger a_v = \left[\exp \frac{\epsilon_v - \xi}{kT_0} + 1 \right]^{-1} \quad (20)$$

$$N_q^j = \begin{cases} \text{Tr } \rho_0(H_0) b_q^\dagger b_q = \left[\exp \frac{\hbar \omega_q}{kT_0} - 1 \right]^{-1} & \text{si } j = 1 \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} \text{Tr } \rho_0(H_0) b_q b_q^\dagger = \left[1 - \exp - \frac{\hbar \omega_q}{kT} \right]^{-1} & \text{si } j = 2 \end{cases} \quad (22)$$

On peut encore simplifier cette dernière expression de $\langle J_- \rangle^{(3)}$ en tenant compte de la valeur des éléments de matrice de x_{vv} , (cf. 2.27) et de γ_{vv} . Il s'avère que seuls les éléments diagonaux x_{vv} interviennent. En utilisant les propriétés algébriques des f_v et N_q^j et des permutations d'indice de sommation, on réussit à faire apparaître le groupement :

$$(\varepsilon_{v\mu} + \hbar\omega_q)^{-1} \left[(\varepsilon_{v\mu} + \hbar\omega_q + i\hbar s)^{-1} (\varepsilon_{v\mu} + \hbar\omega_q + 2i\hbar s)^{-1} (\varepsilon_{v\mu} + \hbar\omega_q + 3i\hbar s)^{-1} + \text{C.C.} \right]$$

dont la limite quand $s \rightarrow 0$ n'est autre que :

$$\frac{i\pi}{3} \delta^{(3)}(\varepsilon_{v\mu} + \hbar\omega_q)$$

(La distribution $\delta^{(3)}(x)$ est la dérivée d'ordre 3 de $\delta(x)$).

Compte tenu de toutes ces remarques, les composantes transversales du vecteur densité de courant prennent les expressions simples :

$$\langle J_y \rangle^{(3)} = 0 \quad (22a)$$

$$\langle J_x \rangle^{(3)} = \frac{e^4 E^3}{6} \sum_{v, v'} \sum_q \left(\frac{\hbar q_y}{m\omega_c} \right)^4 \left[N_q f_v^0 (1 - f_{v'}^0) - (1 + N_q) f_{v'}^0 (1 - f_v^0) \right]$$

$$\frac{2\pi}{\hbar} |\gamma_{vv'}(q)|^2 \delta^{(3)}(\varepsilon_v - \varepsilon_{v'} + \hbar\omega_q) \quad (22b)$$

ANNEXE 2

CALCUL DE $\langle \vec{J} \rangle$ (seconde théorie)

Nous cherchons à évaluer la valeur moyenne :

$$\begin{aligned} \langle J_x + iJ_y \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Tr} (J_x + iJ_y) & \left[1 + \frac{\lambda}{i\hbar} \int_0^t dt_1 H_{\text{ep}}^x(-t_1) \right. \\ & \left. + \frac{\lambda^2}{(i\hbar)^2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 H_{\text{ep}}^x(-t_2) H_{\text{ep}}^x(-t_1) \right] \{\rho_0\} \end{aligned}$$

avec

$$J_x + iJ_y = i e \frac{E}{B} \sum_{\alpha} a_{\alpha}^+ a_{\alpha} - 2ie \left(\frac{\hbar \omega_c}{2m} \right)^{1/2} \sum_{\alpha} (n+1)^{1/2} a_{\alpha+1}^+ a_{\alpha}$$

Rappelons que α représente les trois nombres quantiques n, k_y, k_z , que $\alpha+1$ représente $n+1, k_y, k_z$ et que l'écriture de $(J_x + iJ_y)$ correspond à un cristal de volume unité.

Décomposons le calcul en ses trois termes d'ordre en λ respectivement égal à 0, 1 et 2.

1°) Terme d'ordre zéro en λ

$$\begin{aligned} \langle J_x + iJ_y \rangle (0) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Tr} (J_x + iJ_y) \rho_0 \\ &= i e \frac{E}{B} \sum_{\alpha} \text{Tr} a_{\alpha}^+ a_{\alpha} \rho_0 - 2ie \left(\frac{\hbar \omega_c}{2m} \right)^{1/2} \sum_{\alpha} (n+1)^{1/2} \text{Tr} a_{\alpha+1}^+ a_{\alpha} \rho_0 \end{aligned}$$

$$\text{or, } \text{Tr} a_{\alpha}^+ a_{\alpha} \rho_0 = F_{\alpha} \text{ et } \sum_{\alpha} F_{\alpha} = N$$

$$\text{tandis que } \text{Tr} a_{\alpha+1}^+ a_{\alpha} \rho_0 = 0$$

$$\text{Par conséquent } \langle J_x + iJ_y \rangle (0) = i Ne \frac{E}{B}$$

2°) Terme d'ordre un en λ

λH_{ep} est un opérateur dont tous les éléments diagonaux sont nuls. Ceci entraîne que :

$$\langle J_x + iJ_y \rangle (1) = 0$$

3°) Terme d'ordre deux en λ

$$\begin{aligned} \langle J_x + iJ_y \rangle (2) = & \left(\frac{\lambda}{i\hbar} \right)^2 \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ ie \frac{E}{B} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \operatorname{Tr} \left[\sum_{\alpha} a_{\alpha}^+ a_{\alpha} \right] H_{ep}^x(-t_2) H_{ep}^x(-t_1) \{\rho_0\} \right. \\ & \left. - 2ie \left(\frac{\hbar\omega_c}{2m} \right)^{1/2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \operatorname{Tr} \left[\sum_{\alpha} a_{\alpha+1}^+ a_{\alpha} \right] H_{ep}^x(-t_2) H_{ep}^x(-t_1) \{\rho_0\} \right\} \end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier, du fait que l'opérateur $\sum_{\alpha} a_{\alpha}^+ a_{\alpha}$ n'est autre que l'opérateur nombre d'électrons $\hat{N}$ que la première trace est nulle.

En effet :

$$\operatorname{Tr} \hat{N} H_{ep}^x(-t_2) H_{ep}^x(-t_1) \{\rho_0\} = \operatorname{Tr} [\hat{N}, H_{ep}^x(-t_2)] H_{ep}^x(-t_1) \{\rho_0\}$$

$$\text{et } [\hat{N}, H_{ep}^x(-t_2)] = 0$$

Finalement,

$$\langle J_x + iJ_y \rangle (2) = -2ie \left(\frac{\hbar\omega_c}{2m} \right)^{1/2} \left(\frac{\lambda}{i\hbar} \right)^2 \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \operatorname{Tr} \sum_{\alpha} a_{\alpha+1}^+ a_{\alpha} H_{ep}^x(-t_2) H_{ep}^x(-t_1) \{\rho_0\}$$

Remplaçons λH_{ep} par son expression (3.7), utilisons systématiquement les résultats (3.6), le théorème de Bloch-de Dominicis et les formules connues :

$$e^{\frac{(\hat{H}_e^x + \hat{H}_p^x)t}{i\hbar}} \{a_{\alpha}^+\} = e^{\tilde{\epsilon}_{\alpha} \frac{t}{i\hbar}} a_{\alpha}^+ \quad e^{\frac{(\hat{H}_e^x + \hat{H}_p^x)t}{i\hbar}} \{a_{\alpha}\} = e^{-\tilde{\epsilon}_{\alpha} \frac{t}{i\hbar}} a_{\alpha}$$

$$e^{\frac{(\hat{H}_e^x + \hat{H}_p^x)t}{i\hbar}} \{b_q^+\} = e^{\frac{\hbar\omega_q t}{i\hbar}} b_q^+ \quad e^{\frac{(\hat{H}_e^x + \hat{H}_p^x)t}{i\hbar}} \{b_q\} = e^{-\frac{\hbar\omega_q t}{i\hbar}} b_q$$

De plus, tenons compte des relations suivantes tirées des propriétés algébriques des éléments de matrice $\tilde{\gamma}_{\alpha\alpha'}(q)$:

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} \tilde{\gamma}_{\alpha\alpha'}(q) \tilde{\gamma}_{\alpha',\alpha+1}(-q) - \sqrt{n} \tilde{\gamma}_{\alpha\alpha'}(q) \tilde{\gamma}_{\alpha',-1\alpha}(-q) \\ = \sqrt{n} \tilde{\gamma}_{\alpha-1\alpha'}(q) \tilde{\gamma}_{\alpha',\alpha}(-q) - \sqrt{n+1} \tilde{\gamma}_{\alpha\alpha',+1}(q) \tilde{\gamma}_{\alpha',\alpha}(-q) \\ = \left(\frac{m\omega_c}{2\hbar} \right)^{1/2} (\tilde{\chi}_{k'y} - \tilde{\chi}_{ky}) \left| \tilde{\gamma}_{\alpha\alpha'}(q) \right|^2 - i \left| \frac{\hbar}{2m_c} \right|^{1/2} q_x \left| \tilde{\gamma}_{\alpha\alpha'}(q) \right|^2 \end{aligned}$$

Grâce à ces intermédiaires de calculs, nous aboutissons à :

$$\begin{aligned} \langle J_x + iJ_y \rangle_{(2)} = e \sum_{\alpha\alpha'} \left[\mathcal{N}_q F_{\alpha}(1-F_{\alpha'}) - (1+\mathcal{N}_q) F_{\alpha'}(1-F_{\alpha}) \right] \\ (\tilde{\chi}_{ky} - \tilde{\chi}_{k'y}) \left| \tilde{\gamma}_{\alpha\alpha'}(q) \right|^2 \frac{2\pi}{\hbar} \delta \left(\tilde{\epsilon}_{\alpha} - \tilde{\epsilon}_{\alpha'} + \hbar\omega_q \right) \end{aligned}$$

Et en regroupant les trois résultats précédents sur $\langle J_x + iJ_y \rangle$, nous concluons qu'à l'ordre deux en λ

$$\begin{aligned} \langle J_y \rangle = n e \frac{E}{B} \\ J_x = e \sum_{\alpha\alpha'} \frac{\hbar q_y}{m\omega_c} \left[\mathcal{N}_q F_{\alpha}(1-F_{\alpha'}) - (1+\mathcal{N}_q) F_{\alpha'}(1-F_{\alpha}) \right] \\ \frac{2\pi}{\hbar} \left| \tilde{\gamma}_{\alpha\alpha'}(q) \right|^2 \delta \left(\tilde{\epsilon}_{\alpha} - \tilde{\epsilon}_{\alpha'} + \hbar\omega_q \right) \end{aligned}$$

ANNEXE 3

CALCUL DE $S(\vec{q})$

Nous devons calculer la somme :

$$S(\vec{q}) = \sum_{n, k_y, k_z} \sum_{n', k'_y, k'_z} \{f(\epsilon_n(k_z)) - f(\epsilon_{n'}(k'_z))\} \frac{2\pi}{\hbar} \delta_{k_y, k'_y + q_y} \delta_{k_z, k'_z + q_z} |C(q)|^2$$

$$\left| J_{n, k_y; n', k'_y}(q_x) \right|^2 \delta(\epsilon_n(k_z) - \epsilon_{n'}(k'_z) + \hbar\omega_q^*) \quad (1)$$

Les sommations sur k'_y et k'_z sont triviales du fait des deux premières δ . Comme par ailleurs :

$$\left| J_{n, k_y; n', k'_y - q_y}(q_x) \right|^2 = \left| J'_{n, n'}(q) \right|^2 \quad (2)$$

ne dépend pas de k_y mais uniquement de n, n', q_x et q_y , rien ne dépend de k_y dans l'expression à sommer. La sommation sur k_y revient donc à multiplier l'expression à sommer par la dégénérescence en k_y des niveaux d'énergie électronique, c.a.d. par $\frac{m\omega}{2\pi\hbar}$ (pour un cristal cubique d'arête unité). Par conséquent :

$$S(\vec{q}) = \frac{m\omega}{2\pi\hbar} |C(q)|^2 \sum_{n, n'} \sum_{k_z} \{f(\epsilon_n(k_z)) - f(\epsilon_{n'}(k_z - q_z))\} \frac{2\pi}{\hbar} \left| J'_{n, n'}(q) \right|^2$$

$$\times \delta(\epsilon_n(k_z) - \epsilon_{n'}(k_z - q_z) + \hbar\omega_q^*) \quad (3)$$

$$\text{Or : } \delta(\epsilon_n(k_z) - \epsilon_{n'}(k_z - q_z) + \hbar\omega_q^*) = \frac{m}{\hbar^2 |q_z|} \delta\left(k_z - \frac{q_z}{2} + \frac{m}{\hbar q_z} (\omega_q^* + n\omega_c - n'\omega_c)\right)$$

(4)

La sommation sur k_z s'effectue "comme à l'accoutumé" en remplaçant :

$$\sum_{k_z} \text{ par } \frac{1}{2\pi} \int dk_z \quad (5)$$

et l'intégrale en k_z s'évalue immédiatement grâce à la distribution $\delta(k_z - \frac{q_z}{2} + \dots)$ que nous venons de faire apparaître à la formule (4) ; il reste :

$$S(\vec{q}) = \frac{m^2 \omega_c}{2\pi \hbar^4 |q_z|} |C(q)|^2 \sum_{n,n'} \left[f(\epsilon) - f(\epsilon + \hbar\omega_q^*) \right] |J'_{n,n'}(q)|^2 \quad (6)$$

avec :

$$\epsilon = (n + n' + 1) \frac{\hbar\omega_c}{2} + \frac{m}{2q_z^2} \left(\omega_q^* + (n - n')\omega_c \right)^2 + \frac{\hbar^2 q_z^2}{8m} - \frac{\hbar\omega_q^*}{2} \quad (7)$$

Jusqu'ici aucune approximation n'a été faite en dehors du remplacement de $\sum_{k_z}$ par $(2\pi)^{-1} \int dk_z$. Nous introduisons ici notre première approximation en supposant que :

$$\hbar\omega_c \ll kT \quad (8)$$

Alors, dans l'échelle des énergies, les niveaux de Landau sont proches les uns des autres, et un grand nombre d'entre eux sont occupés par les électrons. Dans ce cas, il est raisonnable de supposer que les électrons se trouvant dans les niveaux pour lesquels le nombre quantique n est élevé constituent la majorité des électrons qui contribuent à $\langle J_x \rangle$. Quand n est élevé, il varie de façon quasi-continue et on peut remplacer :

$$\sum_{n,n'} \text{ par } \int dn \int dn'$$

Pratiquement, nous allons immédiatement effectuer un changement de variables ; au lieu de prendre n et n' comme variables d'intégration, nous choisissons :

$$v = n - n' \quad \text{et} \quad \epsilon \text{ défini par (7)}$$

Le jacobien de la transformation est égal à $(\hbar\omega_c)^{-1}$

Par ailleurs, lorsque n et n' sont des nombres élevés, nous pouvons

utiliser la formule approchée⁽⁷⁾ :

$$|J'_{n,n'}(q)|^2 \approx \frac{1}{\pi} \left[\frac{\hbar}{m\omega_c} (q_x^2 + q_y^2) (n + n' + 1) - (n' - n)^2 - \left(\frac{\hbar}{m\omega_c} \frac{q_x^2 + q_y^2}{2} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

(9)

En exprimant $|J'_{n,n'}(q)|^2$ à l'aide de v et ϵ , on obtient :

$$|J'_{n,n'}(q)|^2 \approx \frac{1}{\pi} \left(-\frac{q^2}{q_z^2} v^2 + a(\epsilon)v + b(\epsilon) \right)^{-1/2}$$

(10)

$$\text{avec : } b(\epsilon) = \frac{q_x^2 + q_y^2}{m\omega_c} \left(2\epsilon - \frac{\hbar q^2}{4m} - \frac{m\omega^*}{2q_z} + \hbar\omega_q^* \right)$$

(11)

$$\text{et : } a(\epsilon) = -2 \frac{q_x^2 + q_y^2}{q_z^2} \frac{\omega^*}{\omega_c} q$$

(12)

Remarquons alors que $|J'_{n,n'}(q)|^2$ n'existe que si le second membre de (10) existe ; il est donc nécessaire que :

$$-\frac{q^2}{q_z^2} v^2 + a(\epsilon)v + b(\epsilon) > 0$$

(13)

$$\text{Ce qui impose : } 1^\circ / \epsilon \geq \epsilon_{\min}(q) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{q}{2} - \frac{m\omega^*}{\hbar q} \right)^2$$

(14)

$$2^\circ / v_1 < v < v_2$$

(15)

où v_1 et v_2 sont les deux racines du trinôme en v intervenant dans (13).

En tenant compte de tout ce qui concerne la sommation sur n et n' , nous aboutissons à :

$$S(\vec{q}) = \frac{m^2}{2\pi\hbar^5} \frac{|C(q)|^2}{|q_z|} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon_{\min}(q)}^{\infty} d\epsilon \int_{v_1}^{v_2} dv \left(-\frac{q^2}{q_z^2} v^2 + a(\epsilon)v + b(\epsilon) \right)^{-1/2} \\ \left(f(\epsilon) - f(\epsilon + \hbar\omega_q^*) \right)$$

(16)

$$\text{Comme : } \frac{1}{\pi} \int_{v_1}^{v_2} dv \left(- \frac{q_z^2}{2} v^2 + a(\epsilon)v + b(\epsilon) \right)^{-1/2} = \frac{|q_z|}{q} \quad (17)$$

Il reste :

$$S(\vec{q}) = \frac{m^2}{2\pi\hbar^5} \frac{|C(q)|^2}{q} \int_{\epsilon_{\min}(q)}^{\infty} d\epsilon \left(f(\epsilon) - f(\epsilon + \hbar\omega_{\vec{q}}) \right) \quad (18)$$

ANNEXE 4

$$\text{CALCUL DES INTEGRALES } L_{\pm}^r = \int_0^{\theta/T} dt \, t^r \frac{e^{t/2} \pm e^{-\frac{t}{2} + t \frac{T}{T_0}}}{e^{t \frac{T}{T_0}} - 1} e^{-\frac{t^2}{16\gamma^2}}$$

Ces intégrales interviennent dans l'équation (4.29) de $\langle J_x \rangle$ que l'on peut réécrire :

$$\begin{aligned} \langle J_x \rangle = & \frac{\sqrt{2}}{3\pi^{3/2}} \frac{n \, m^{1/2} D^{(p)}}{h (kT)^{1/2} B} \left(\frac{kT}{hs} \right)^{p+1} \frac{V_0}{V_T} e^{-\gamma^2} \left(\frac{1}{4\gamma} L_+^{p+1} - \gamma L_-^p \right. \\ & \left. + \frac{1}{5} \frac{V_0^2}{V_T^2} \left(-\frac{3}{4\gamma} L_+^{p+1} + 3\gamma L_-^p + \frac{1}{32\gamma^3} L_+^{p+3} - \frac{3}{8\gamma} L_-^{p+2} + \frac{3\gamma}{2} L_+^{p+1} + 2\gamma^3 L_-^p \right) \right) \end{aligned}$$

Pour évaluer $L_{\pm}^r$, le plus simple consiste à développer en série de puissances de t le rapport :

$$\frac{e^{\frac{t}{2}} \pm e^{-\frac{t}{2} + t \frac{T}{T_0}}}{e^{t \frac{T}{T_0}} - 1}$$

Ceci conduit à :

$$L_+^r = 2 \frac{T_0}{T} \int_0^{\theta/T} dt \, t^{r-1} e^{-\frac{t^2}{16\gamma^2}} \left(1 + \frac{t^2}{24} \left(3 - 6 \frac{T}{T_0} + 2 \frac{T^2}{T_0^2} \right) + \dots \right)$$

$$L_-^r = \left(\frac{T_0}{T} - 1 \right) \int_0^{\theta/T} dt \, t^r e^{-\frac{t^2}{16\gamma^2}} \left(1 + \frac{t^2}{24} \left(1 - 2 \frac{T}{T_0} \right) + \dots \right)$$

Le changement de variable : $t' = \frac{t}{4\gamma}$ montre que les termes en t^2 qui figurent dans les crochets de $L_{\pm}^r$ conduisent à des corrections de l'ordre de γ^2 qui sont entièrement négligeables quand :

$$\gamma \ll 1$$

Ce résultat est encore valable pour les autres termes des crochets en t^3 , t^4 ... que nous n'avons pas écrits. Cependant, nous venons d'admettre implicitement que les coefficients γ et γ_0 - c'est-à-dire les températures T et T_0 - restaient du même ordre de grandeur ; nous vérifierons ultérieurement que, pour les phénomènes d'électrons tièdes, il en est bien ainsi.

Par ailleurs, l'exposant r restant petit ($1 < r < 6$), la fonction $t^r e^{-t^2/16\gamma^2}$ décroît très rapidement avec t quand $\gamma \ll 1$. Les températures de Debye des semiconducteurs étant en général supérieures à 100°K , la fonction $t^r e^{-t^2/16\gamma^2}$ est pratiquement nulle quand t varie dans l'intervalle $(\frac{\theta}{T}, \infty)$, quelles que soient les températures T physiquement rencontrées. On peut donc remplacer la borne supérieure $\frac{\theta}{T}$ par $+\infty$. En fait, cette approximation n'est pas nécessaire pour poursuivre les calculs, mais il n'y a pas lieu de s'en priver puisqu'elle n'introduit que des termes correctifs en $e^{-(\theta/T)^2} 1/16\gamma^2$.
Finalement :

$$L_+^r \approx (4\gamma)^r \frac{1}{2} \frac{T_0}{T} \int_0^\infty dt' t'^{r-1} e^{-t'^2}$$

$$\text{et } L_-^r \approx (4\gamma)^{r+1} \left(\frac{T_0}{T} - 1 \right) \int_0^\infty dt' t'^r e^{-t'^2}$$

Les deux dernières intégrales sont purement numériques et bien connues. En revenant à l'expression initiale de $\langle J_x \rangle$, nous obtenons les formules (31a) et (31b) du chapitre 4.

ANNEXE 5

EVALUATION DES INTEGRALES
$$\int_0^{\frac{\hbar\omega_{\max}^2}{2m\omega_q}} \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_{\frac{V_o}{V_T}}^{\frac{V_o}{V_T}} du u e^{-\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left(\sqrt{x} \pm \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \pm u\right)^2}$$

L'utilisation de la formule (4.28) conduit à :

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{V_o}{V_T}}^{\frac{V_o}{V_T}} du u e^{-\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left(\sqrt{x} \pm \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \pm u\right)^2} = 2 \frac{V_o^3}{V_T^3} \left\{ \mp \frac{4}{3!} \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left(\sqrt{x} \pm \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \right. \\ & \left. \pm \frac{V_o^2}{V_T^2} \frac{16}{5!} \left[3 \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left(\sqrt{x} \pm \frac{1}{\sqrt{x}}\right) - 2 \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{3/2} \left(\sqrt{x} \pm \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 \right] \right\} e^{-\frac{\alpha}{2} \left(\sqrt{x} \pm \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} \quad (1) \end{aligned}$$

En reportant ce résultat partiel dans l'intégrale en x, il restera à calculer des intégrales de la forme :

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\hbar\omega_{\max}^2}{2m\omega_q}} dx x^{p-1} e^{-\frac{\alpha}{2} \left(x + \frac{1}{x}\right)} \quad \text{avec} \quad -1 < p < 2 \quad (2)$$

La fonction à intégrer présente un maximum au voisinage de $x = 1$ et décroît exponentiellement avec x au-delà de ce maximum. Cette décroissance est d'autant plus rapide que le paramètre $\alpha = \frac{\hbar\omega_q}{2kT}$ est grand. On peut noter dès maintenant que l'énergie des phonons optiques - exprimée en degrés Kelvin - est de l'ordre de, ou supérieure à la température ambiante. Par conséquent, la valeur de α est rarement inférieure à l'unité. De plus $\hbar\omega_{\max}^2/2m\omega_q$ est une quantité atteignant aisément des valeurs élevées de l'ordre de 10^3 . Dans ces conditions, comme pour les valeurs de x élevées, la fonction à intégrer se comporte comme $e^{-\alpha x}$, on peut remplacer la borne supérieure $\hbar\omega_{\max}^2/2m\omega_q$ par 1^∞ , la contribution à l'intégrale de l'intervalle $(\hbar\omega_{\max}^2/2m\omega_q, \infty)$

étant négligeable. Ce résultat est très agréable car les intégrales

$$K_n(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dx x^{n-1} e^{-\frac{\alpha}{2} (x + \frac{1}{x})} = K_{-n}(\alpha) \quad (3)$$

définissent les fonctions de Bessel modifiées de seconde espèce, tabulées dans la référence (14).

En tenant compte de toutes ces remarques, la formule (52) donnant $\langle J_x \rangle$ se transforme en :

$$\begin{aligned} \langle J_x \rangle = & \frac{2}{3} \frac{n}{\pi} \frac{m}{3/2} \frac{D^{(0)}}{B^2} \frac{\alpha}{\text{sh} \alpha_o} \frac{V_o}{V_T} \text{ch}(\alpha - \alpha_o) K_1(\alpha) \left\{ 1 - \frac{K_o(\alpha)}{K_1(\alpha)} \text{th}(\alpha - \alpha_o) \right. \\ & \left. - \frac{1}{5} \frac{V_o^2}{V_T^2} \left[3 - \alpha \frac{K_2(\alpha) + 3K_o(\alpha)}{K_1(\alpha)} + \frac{4\alpha K_1(\alpha) - 3K_o(\alpha)}{K_1(\alpha)} \text{th}(\alpha - \alpha_o) \right] \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

La composante linéaire du courant s'obtient en faisant $T = T_o$ et en supprimant tous les termes d'ordre en E supérieurs à un :

$$\langle J_x \rangle^{(1)} = \frac{2}{3\pi} \frac{n}{3/2} \frac{m}{B^2} \frac{D^{(0)}}{B^2} \frac{\alpha_o}{\text{sh} \alpha_o} \frac{K_1(\alpha_o)}{V_{T_o}} E \quad (5)$$

ANNEXE 6

CALCUL FINAL DE $\langle J_x \rangle$ EN LIMITE QUANTIQUE

CAS DES PHONONS ACOUSTIQUES

Il s'agit ici de terminer le calcul de $\langle J_x \rangle$ dont l'expression est donnée par (5.13) :

$$\begin{aligned} \langle J_x \rangle = & \frac{2n m^{1/2} D(p)}{(2\pi)^{5/2} \hbar (kT)^{1/2} B} \left(\frac{kT}{\hbar s} \right)^{p+1} \frac{V_T^2}{V_o^2} \int_0^{\theta/T} dt \int_0^\pi dx t^p e^{-\frac{1}{\gamma^2} \frac{kT}{4\hbar\omega_c} t^2 \sin^2 \chi} \frac{\sin^2 \chi}{|\cos \chi|} \\ & \int_{-\frac{V_o}{V_T}}^{+\frac{V_o}{V_T}} du' \frac{u'}{\sqrt{1 - \frac{V_T^2}{V_o^2} u'^2}} \left[\exp - \left(\frac{t \cos \chi}{4\gamma} - \frac{\gamma}{\cos \chi} - u' \operatorname{tg} \chi \right)^2 \right. \\ & \left. - e^{\frac{t}{T_o}} \exp - \left(\frac{t \cos \chi}{4\gamma} + \frac{\gamma}{\cos \chi} + u' \operatorname{tg} \chi \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (1)$$

Nous supposons la condition $\frac{V_o}{V_T} \ll 1$ remplie et nous évaluons l'intégrale en u' à l'aide du développement (4.28). Nous obtenons après quelques transformations :

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{V_o}{V_T}}^{+\frac{V_o}{V_T}} du' \frac{u'}{\sqrt{1 - \frac{V_T^2}{V_o^2} u'^2}} e^{-\left(\frac{t \cos \chi}{4\gamma} \pm \frac{\gamma}{\cos \chi} \pm u' \operatorname{tg} \chi \right)^2} & \approx \frac{\pi}{2} \frac{V_o^3}{V_T^2} 2 \operatorname{tg} \chi \left(\frac{t}{4} \cos \chi \pm \frac{\gamma}{\cos \chi} \right. \\ & \left. e^{-\left(\frac{t}{4} \cos \chi \pm \frac{\gamma}{\cos \chi} \right)^2} \left\{ + 1 + \frac{V_o^2}{V_T^2} \left[\frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 \chi \mp \operatorname{tg}^2 \chi \left(\frac{t}{4\gamma} \cos \chi \pm \frac{\gamma}{\cos \chi} \right)^2 \right] \right\} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Après avoir reporté ce résultat partiel dans (13), il reste des intégrations en χ et t . Pour celle en χ , nous remarquons que :

$$\int_0^\pi d\chi \dots = 2 \int_0^{\pi/2} d\chi \dots$$

Effectuons alors le changement de variable :

$$W = \frac{\gamma^2}{\cos^2 \chi} \quad (3)$$

Nous aboutissons alors à :

$$\begin{aligned} \langle J_x \rangle = & \frac{n m^{1/2} D^{(p)}}{4(2\pi)^{3/2} \hbar (kT)^{1/2} B} \left(\frac{kT}{\hbar s} \right)^{p+1} \frac{V_o}{s} \int_0^{\theta/T} dt t^p e^{-\frac{1}{\gamma^2} \frac{kT}{4\hbar\omega_c} t^2} \int_0^\infty dW e^{-\left(\frac{t^2}{16} \left(1 - \frac{4kT}{\hbar\omega_c} \right) \frac{1}{W} + W \right)} \\ & \left\{ \frac{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2} + t \frac{T}{T_o}}}{e^{\frac{t}{2}} - 1} \left[\frac{t}{W} \left(1 - \frac{\gamma^2}{W} \right) - \frac{V_o^2}{s^2} t \left(\frac{3}{4} - \frac{t^2}{32W} - \frac{3}{2} W \right) \left(1 - \frac{\gamma^2}{W} \right)^2 \right] \right. \\ & \left. - \frac{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2} + t \frac{T}{T_o}}}{e^{\frac{t}{2}} - 1} \left[4 \left(1 - \frac{\gamma^2}{W} \right) - \frac{V_o^2}{s^2} \left(3W - \frac{3t^2}{8} - 2W^2 \right) \left(1 - \frac{\gamma^2}{W} \right)^2 \right] \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

Afin de poursuivre les calculs, nous devons distinguer entre deux cas selon les valeurs du paramètre :

$$a^2 = \frac{1}{\gamma^2} \frac{kT}{4\hbar\omega_c} = \frac{V_o^2}{s^2} \frac{kT}{4\hbar\omega_c} \quad (5a)$$

auquel est automatiquement associé :

$$a_o^2 = \frac{1}{\gamma^2} \frac{kT_o}{4\hbar\omega_c} \quad (5b)$$

Notons que la condition $a_o^2 \gamma_o^2 \ll 1$ (ou $a^2 \gamma^2 \ll 1$ du fait que T reste toujours voisin de T_o dans les faibles déviations par rapport à la loi d'Ohm) est

toujours réalisée du fait que nous traitons de la limite quantique où $\hbar\omega_c \gg kT$. Remarquons aussi que si $a^2 \gg 1$, on doit obligatoirement satisfaire l'inégalité $\gamma^2 \ll 1$; ce cas se produira donc aux températures relativement élevées et pour des inductions magnétiques juste suffisantes pour atteindre la limite quantique. Au contraire, à basse température et à induction magnétique élevée, la condition inverse $a^2 \ll 1$ sera aisément réalisée.

1° Etude du premier cas : $a^2 \gg 1$

L'intégrale en t qui figure dans (4) fait intervenir le facteur $e^{-a^2 t^2}$. De ce fait et de la condition $a^2 \gg 1$, on déduit que la fonction de t à intégrer décroît très rapidement avec t et seules les valeurs de t voisines de

$\frac{1}{a^2} \ll 1$ vont contribuer à l'intégrale. Nous pouvons donc :

- 1° remplacer la borne supérieure $\frac{\theta}{T} \gg \frac{1}{2a}$ par 1^∞ ;
- 2° développer le facteur

$$\frac{e^{-\frac{t^2}{2}} - e^{-\frac{t^2}{2} + t \frac{T}{T_0}}}{e^{-\frac{t^2}{2} + t \frac{T}{T_0}} - 1}$$

au voisinage de $t = 0$. Ce dernier travail a déjà été effectué dans l'annexe 4. Il suffit d'ailleurs de conserver le premier terme du développement, les corrections apportées par les suivants étant d'ordre supérieur ou égal à $a^{-2} \ll 1$.

Introduisons alors le paramètre b , voisin de l'unité et tel que :

$$b^2 = 1 - \frac{4kT}{\hbar\omega_c} \quad (6)$$

A b est évidemment associé son homologue b_0 . Ils satisfont respectivement les équations :

$$b^2 + 16 a^2 \gamma^2 = 1 \quad \text{et} \quad b_0^2 + 16 a_0^2 \gamma_0^2 = 1 \quad (7)$$

Le courant $\langle J_x \rangle$ prend la forme :

$$\begin{aligned}
 \langle J_x \rangle &= \frac{n m^{1/2} D(p)}{2(2\pi)^{3/2} \hbar(kT)^{1/2} B} \left(\frac{kT}{\hbar s} \right)^{p+1} \frac{V_o}{s} \frac{T_o}{T} \int_0^\infty dt \, t^p e^{-a^2 t^2} \int_{\gamma^2}^\infty dW e^{-\frac{bt}{4} \left(\frac{bt}{4W} + \frac{4W}{bt} \right)} \\
 &\quad \left\{ \frac{1}{W} \left(1 - \frac{\gamma^2}{W} \right) - \frac{V_o^2}{s^2} \left(\frac{3}{4} - \frac{t^2}{32W} - \frac{3}{2} W \right) \left(1 - \frac{\gamma^2}{W} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \left(1 - \frac{T}{T_o} \right) \left[2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{W} \right) - \frac{V_o^2}{s^2} \left(\frac{3}{2} W - \frac{3t^2}{16} - W^2 \right) \left(1 - \frac{\gamma^2}{W} \right)^2 \right] \right\} \quad (8)
 \end{aligned}$$

Un grand nombre d'intégrales doubles sont apparues dans (8) que nous allons évaluer de façon approchée en tenant compte des deux conditions qui sont d'ailleurs simultanément remplies : $\gamma^2 \ll 1$ et $a^2 \gg 1$. Nous allons en évaluer explicitement deux typiques et donner simplement les résultats pour les autres.

a) Soit, dans le cas du couplage par potentiel de déformation, où $p = 3$, l'intégrale :

$$C_1 = \int_0^\infty dt \, t^3 e^{-a^2 t^2} \int_{\gamma^2}^\infty dW e^{-\frac{bt}{4} \left(\frac{bt}{4W} + \frac{4W}{bt} \right)} \frac{1}{W^2} (W - \gamma^2) \quad (9)$$

Elle se décompose en :

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \int_0^\infty dt \, t^3 e^{-a^2 t^2} \left(\int_0^\infty dW \frac{1}{W} e^{-\frac{bt}{4} \left(\frac{bt}{4W} + \frac{4W}{bt} \right)} - \gamma^2 \int_0^\infty dW \frac{1}{W^2} e^{-\frac{bt}{4} \left(\frac{bt}{4W} + \frac{4W}{bt} \right)} \right) \\
 &\quad - \int_0^{\gamma^2} dW \frac{e^{-W} (W - \gamma^2)}{W^2} \int_0^\infty dt \, t^3 e^{-(a^2 + \frac{b^2}{16W}) t^2} \quad (10)
 \end{aligned}$$

Nous avons fait ainsi apparaître les intégrales de la formule (3) de l'annexe 5 qui définissent les fonctions de Bessel $K_n \left(\frac{bt}{2} \right)$. De plus, dans la dernière intégrale double où W varie de 0 à $\gamma^2 \ll 1$, le facteur e^{-W} peut être assimilé à l'unité, ce qui revient à négliger des termes correctifs soit d'ordre γ^2 , soit d'ordre a^{-2} .

Par conséquent, C_1 devient :

$$C_1 \approx 2 \int_0^\infty dt e^{-a^2 t^2} t^3 \left[K_0\left(\frac{bt}{2}\right) - \gamma^2 \frac{4}{bt} K_1\left(\frac{bt}{2}\right) \right] - \frac{1}{2} \int_0^{\gamma^2} dW \frac{W - \gamma^2}{W^2} \frac{1}{\left(a^2 + \frac{b^2}{16W}\right)^2} \quad (11)$$

Dans la première intégrale en t , toujours à cause du facteur $e^{-a^2 t^2}$ décroissant très rapidement avec t , nous pouvons développer $K_0\left(\frac{bt}{2}\right)$ et $K_1\left(\frac{bt}{2}\right)$ au voisinage de $t = 0$ et ne conserver que le premier terme du développement ; les autres termes produiront des corrections d'ordre supérieur ou égal à a^{-2} . Au voisinage de $t = 0$, les fonctions K_0 et K_1 se comportent comme ⁽¹⁴⁾ :

$$K_0\left(\frac{bt}{2}\right) \approx -\text{Log} \frac{bC}{4} t \quad \text{avec} \quad \text{Log } C = \text{constante d'Euler} \quad (12)$$

$$K_1\left(\frac{bt}{2}\right) \approx \frac{2}{bt} \quad (13)$$

En conséquence :

$$C_1 \approx 2 \int_0^\infty dt e^{-a^2 t^2} t^3 \left[-\text{Log} \frac{bC}{4} t - \gamma^2 \frac{8}{b^2 t^2} \right] + \frac{1}{2a^4} \text{Log} \left[b^2 + \frac{1}{b^2} - 1 \right] \quad (14)$$

Posons alors $t' = t^2$ et utilisons le résultat connu :

$$\int_0^\infty dt' t' \text{Log } t' e^{-t'} = -\text{Log} \frac{C}{e} \quad (15)$$

pour aboutir à :

$$C_1 \approx \frac{1}{a^4} \left[\text{Log} \frac{4a}{b(eC)^{1/2}} - \frac{8a^2 \gamma^2}{b^2} + \frac{1}{2} (\text{Log } b^2 + \frac{1}{b^2} - 1) \right] \quad (16)$$

et comme d'après (5) et (6) :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{b^2} - 1 \right) - \frac{8a^2 \gamma^2}{b^2} = 0 \quad (17)$$

C_1 vaut finalement :

$$C_1 \approx \frac{1}{a^4} \left[\text{Log} \frac{4a}{(eC)^{1/2}} + \mathcal{O}(\gamma^{-2}) \right] \quad (18)$$

A l'aide de procédés analogues, on obtient :

$$C_2 = \int_0^{\theta/T} dt \, t^3 e^{-a^2 t^2} \int_{\gamma^2}^{\infty} dW e^{-\frac{bt}{4} \left(\frac{bt}{4W} + \frac{4W}{bt} \right)} \left(1 - \frac{\gamma^2}{W} \right) \approx \frac{1}{2a^4} \left[1 + \mathcal{O}(\gamma^2) \right] \quad (19)$$

$$C_3 = \int_0^{\theta/T} dt \, t^3 e^{-a^2 t^2} \int_{\gamma^2}^{\infty} dW e^{-\frac{bt}{4} \left(\frac{bt}{4W} + \frac{4W}{bt} \right)} \frac{1}{W^3} (W - \gamma^2)^2$$

$$\approx \frac{2}{a^6} \text{Log} \left[\frac{4a}{C^{1/2} e^{3/4}} + \frac{1}{b^2} - 1 \right] \quad (20)$$

$$C_4 = \int_0^{\theta/T} dt \, t^3 e^{-a^2 t^2} \int_{\gamma^2}^{\infty} dW e^{-\frac{bt}{4} \left(\frac{bt}{4W} + \frac{4W}{bt} \right)} \frac{(W - \gamma^2)^2}{W} \approx \frac{1}{2a^4} \left[1 + \mathcal{O}(\gamma^2) \right] \quad (21)$$

$$C_5 = \int_0^{\theta/T} dt \, t^3 e^{-a^2 t^2} \int_{\gamma^2}^{\infty} dW e^{-\frac{bt}{4} \left(\frac{bt}{4W} + \frac{4W}{bt} \right)} \left(1 - \frac{\gamma^2}{W} \right) \approx \frac{1}{2a^4} \left[1 + \mathcal{O}(\gamma^2) + \mathcal{O}(a^{-2}) \right] \quad (22)$$

$$C_6 = \int_0^{\theta/T} dt \, t^5 e^{-a^2 t^2} \int_{\gamma^2}^{\infty} dW e^{-\frac{bt}{4} \left(\frac{bt}{4W} + \frac{4W}{bt} \right)} \left(1 - \frac{\gamma^2}{W} \right)^2 \approx \frac{1}{2a^6} \left[1 + \mathcal{O}(\gamma^2) \right] \quad (23)$$

$$C_7 = \int_0^{\theta/T} dt \, t^3 e^{-a^2 t^2} \int_{\gamma^2}^{\infty} dW e^{-\frac{bt}{4} \left(\frac{bt}{4W} + \frac{4W}{bt} \right)} (W - \gamma^2)^2 \approx \frac{1}{2a^4} \left[1 + \mathcal{O}(\gamma^2) \right] \quad (24)$$

b) Nous passons maintenant au cas du couplage piézoélectrique où $p = 1$ et nous calculons l'intégrale type :

$$C'_1 = \int_0^\infty dt \, t \, e^{-a^2 t^2} \int_{\gamma^2}^\infty dW \, e^{-\frac{bt}{4} \left(\frac{bt}{4W} + \frac{4W}{bt} \right)} \frac{W - \gamma^2}{W^2} \quad (25)$$

En procédant comme pour C_1 , nous obtenons dans un premier temps :

$$C'_1 = \frac{1}{a^2} \text{Log} \frac{4a}{bC^{1/2}} - \frac{8\gamma^2}{b^2} \int_0^\infty dt' \frac{e^{-t'}}{t'} - 8 \int_0^{\gamma^2} dW \, e^{-W} \frac{W - \gamma^2}{W(16a^2 W + b^2)} \quad (26)$$

Nous constatons alors que les deux intégrales qui restent divergent alors que C'_1 est une intégrale convergente. La somme algébrique des deux intégrales divergentes est donc convergente. Nous pouvons donc poursuivre en remarquant que :

$$\int_0^{\gamma^2} dW \, e^{-W} \frac{W - \gamma^2}{W(16a^2 W + b^2)} \approx -\frac{1}{2a^2} \text{Log} b^2 - \gamma^2 \int_0^{\gamma^2} dt' \frac{e^{-t'}}{t'(16a^2 t' + b^2)} \quad (27)$$

(Nous avons simplement posé $W = t'$ dans l'intégrale du second membre de (27).)
En reportant ce résultat intermédiaire dans (26), il vient :

$$C'_1 \approx \frac{1}{a^2} \text{Log} \frac{4a}{C^{1/2}} - \frac{8\gamma^2}{b^2} \int_0^{\gamma^2} dt' \frac{e^{-t'}}{t'} \left(1 - \frac{1}{16a^2 t' + b^2} \right) - \frac{8\gamma^2}{b^2} \int_{\gamma^2}^\infty dt' \frac{e^{-t'}}{t'} \quad (28)$$

Dans l'intervalle $(0, \gamma^2)$, $e^{-t'}$ est assimilable à l'unité puisque $\gamma^2 \ll 1$; la première intégrale se calcule alors sans difficulté ; il reste :

$$C'_1 \approx \frac{1}{a^2} \text{Log} \frac{4a}{C^{1/2}} + \frac{8\gamma^2}{b^2} \text{Log} b^2 - \frac{8\gamma^2}{b^2} \int_{\gamma^2}^\infty dt' \frac{e^{-t'}}{t'} \quad (29)$$

La dernière intégrale est toujours inférieure à $(-\text{Log} \gamma^2)$ lorsque $\gamma^2 \ll 1$; et comme $a^2 \gamma^2 \ll 1$, finalement :

$$C'_1 \approx \frac{1}{a^2} \text{Log} \frac{4a}{C^{1/2}} \left(1 + \mathcal{O}(\gamma^2) \right)$$

A l'aide de procédés relevant soit du §a, soit du §b, les autres intégrales s'évaluent et donnent :

$$C'_2 = \int_0^{\theta/T} dt \, t \, e^{-a^2 t^2} \int_{\gamma^2}^{\infty} dW \, e^{-\frac{bt}{4} \left(\frac{bt}{4W} + \frac{4W}{bt} \right)} \left(1 - \frac{\gamma^2}{W} \right)^2 \approx \frac{1}{2a^2} \left(1 + \mathcal{O}(\gamma^2) \right) \quad (31)$$

$$C'_3 = \int_0^{\infty} dt \, t^3 \, e^{-a^2 t^2} \int_{\gamma^2}^{\infty} dW \, e^{-\frac{bt}{4} \left(\frac{bt}{4W} + \frac{4W}{bt} \right)} \frac{(W - \gamma^2)^2}{W^3} \\ \approx \frac{1}{a^4} \operatorname{Log} \left(\frac{4a}{(eC)^{1/2}} + \frac{1}{2} (1 - b^2) + \mathcal{O}(\gamma^2) \right) \quad (32)$$

$$C'_4 = \int_0^{\theta/T} dt \, t \, e^{-a^2 t^2} \int_{\gamma^2}^{\infty} dW \, e^{-\frac{bt}{4} \left(\frac{bt}{4W} + \frac{4W}{bt} \right)} \frac{(W - \gamma^2)^2}{W} \approx \frac{1}{2a^2} \left(1 + \mathcal{O}(\gamma^2) \right) \quad (33)$$

$$C'_5 = \int_0^{\theta/T} dt \, t \, e^{-a^2 t^2} \int_{\gamma^2}^{\infty} dW \, e^{-\frac{bt}{4} \left(\frac{bt}{4W} + \frac{4W}{bt} \right)} \left(1 - \frac{\gamma^2}{W} \right) \approx \frac{1}{2a^2} \left(1 + \mathcal{O}(\gamma^2) \right) \quad (34)$$

$$C'_6 = C_2 \quad (35)$$

$$C'_7 = \int_0^{\theta/T} dt \, t \, e^{-a^2 t^2} \int_{\gamma^2}^{\infty} dW \, e^{-\frac{bt}{4} \left(\frac{bt}{4W} + \frac{4W}{bt} \right)} (W - \gamma^2)^2 \approx \frac{1}{2a^2} \left(1 + \mathcal{O}(\gamma^2) \right) \quad (36)$$

Remarque générale. - Dans toutes les expressions finales des intégrales C_i et C'_i , nous avons écrit : $\mathcal{O}(\gamma^2)$. Ceci signifie en fait que nous avons négligé devant l'unité des termes qui sont tantôt d'ordre γ^2 , tantôt d'ordre a^{-2} ou même d'ordre $a^2 \gamma^2 = \frac{kT}{4\hbar\omega_c}$.

En reportant tous ces résultats concernant les C_i et C'_i , et en négligeant tous les termes en γ^2 , a^{-2} et $a^2 \gamma^2$ devant l'unité, nous trouvons finalement :

- Pour le couplage par potentiel de déformation :

$$\langle J_x(T_o, T) \rangle = \frac{\bar{e}^2 n m^{1/2} D(3)}{\sqrt{2} \pi^{3/2} \hbar^3 s(kT_o)^{1/2}} \text{Log} \frac{4a_o}{(eC)^{1/2}} E \left(\frac{T_o}{T} \right)^{3/2} \left[1 + \frac{\text{Log } T/T_o}{\text{Log} \frac{4a_o}{(eC)^{1/2}}} \right] \\ \left[1 + \frac{3}{8} \frac{V_o^2}{s^2} \frac{1}{\text{Log} \frac{4a}{C^{1/2}}} - \left(1 - \frac{T}{T_o} \right) \frac{1}{\text{Log} \frac{4a}{(eC)^{1/2}}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{V_o^2}{s^2} \right) \right] \quad (37)$$

- Pour le couplage piézoélectrique :

$$\langle J_x(T_o, T) \rangle = \frac{\bar{e} n m^{1/2} D(1)}{(2\pi)^{3/2} \hbar^2 s(kT_o)^{1/2}} \text{Log} \frac{4a_o}{C^{1/2}} \frac{E}{B} \left(\frac{T_o}{T} \right)^{3/2} \left[1 + \frac{\text{Log } T/T_o}{\text{Log} \frac{4a_o}{C^{1/2}}} \right] \\ \left[1 + \frac{3}{8} \frac{V_o^2}{s^2} \frac{1}{\text{Log} \frac{4a}{C^{1/2}}} - \left(1 - \frac{T}{T_o} \right) \frac{1}{\text{Log} \frac{4a}{C^{1/2}}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{V_o^2}{s^2} \right) \right] \quad (38)$$

Nous abandonnons ici ces deux résultats qui sont discutés dans le texte pour passer au second cas limite :

2° Etude du deuxième cas : $a^2 \ll 1$

Nous partons à nouveau de la formule (4) donnant $\langle J_x \rangle$. Nous maintenons la condition sur γ^2 : $\gamma^2 \ll 1$; cette inégalité est en effet souvent satisfaite à des températures aussi basses que $T = 10^\circ K$ où γ^2 peut être de l'ordre de 10^{-2} dans les corps où la masse effective électronique est faible. Notons cependant que les calculs peuvent être menés à leur terme au prix de quelques longueurs, même dans le cas où $\gamma^2 \approx 1$.

Pour que $a^2 \ll 1$, il faut donc compenser, dans l'expression de a^2 , l'importance du facteur γ^{-2} par la faiblesse du rapport $kT/\hbar\omega_c$. Nous pouvons donc, sans erreur appréciable, assimiler à l'unité le coefficient b défini par (6).

Par ailleurs, à l'aide de décompositions des intégrales analogues à

celles que nous avons faites dans le paragraphe précédent où $a^2 \gg 1$, nous pouvons montrer que le remplacement de γ^2 par 0 dans (4) revient à négliger des termes d'ordre supérieur ou égal à γ^2 .

L'utilisation de ces dernières remarques et de la définition des fonctions de Bessel K_n permet de mettre $\langle J_x \rangle$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle J_x \rangle = & \frac{n m^{1/2} D(p)}{2(2\pi)^{3/2} \hbar (kT)^{1/2} B} \left(\frac{kT}{\hbar s} \right)^{p+1} \frac{V_0}{s} \int_0^{\theta/T} dt t^n e^{-a^2 t^2} \\ & \left\{ \frac{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2} + t \frac{T}{T_0}}}{e^{t \frac{T}{T_0}} - 1} \left[t K_0\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{16} \frac{V_0^2}{s^2} \left(3t^2 K_1\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{t^3}{2} K_0\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{3}{2} t^3 K_2\left(\frac{t}{2}\right) \right) \right] \right. \\ & \left. - \frac{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2} + t \frac{T}{T_0}}}{e^{t \frac{T}{T_0}} - 1} \left[t K_1\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{16} \frac{V_0^2}{s^2} \left(3t^2 K_2\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{3t^3}{2} K_1\left(\frac{t}{2}\right) + 2t^2 K_3\left(\frac{t}{2}\right) \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

Nous ne pouvons plus raisonner comme dans le premier cas où la condition $a^2 \gg 1$ permettait de développer les fonctions multiplicatives de $e^{-a^2 t^2}$ au voisinage de $t = 0$ et de faire apparaître ainsi les facteurs $\frac{T}{T_0}$ ou $(1 - \frac{T}{T_0})$. Par contre, dans la mesure où nous ne nous sommes intéressés qu'aux phénomènes d'électrons tièdes, nous pouvons supposer que T reste très voisin de T_0 ; cette hypothèse permettra d'explicitier ultérieurement T en fonction de T_0 et de préciser en fin de calcul, ainsi que cela se fait dans les raisonnements "self-consistent", les conditions de validité de l'hypothèse de départ.

Nous sommes donc conduit à développer les termes de (39) faisant intervenir T/T_0 par rapport à $1 - \frac{T}{T_0}$. Ainsi :

$$\frac{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2} + t \frac{T}{T_0}}}{e^{t \frac{T}{T_0}} - 1} \approx \frac{2 e^{t/2}}{e^t - 1} \left(1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) t \frac{e^t + 1}{e^t - 1} \right) \quad (40a)$$

$$\text{et : } \frac{\frac{t}{2} + e^{-\frac{t}{2} + t \frac{T}{T_0}}}{e^{\frac{t}{T_0}} - 1} \approx \frac{e^{t/2}}{e^t - 1} t \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) \quad (40b)$$

Ces développements n'ont de sens que si le terme correctif :

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) t \frac{e^t + 1}{e^t - 1}$$

reste petit devant 1 pour toutes les valeurs de t de l'intervalle d'intégration $0 < t < \frac{\theta}{T}$. Or, ceci peut ne pas se produire dans la limite des basses températures quand t atteint la borne supérieure θ/T . Il faut alors remarquer que les fonctions à intégrer qui interviennent dans (39) passent toutes par un maximum se produisant quand t vaut quelques unités et décroissent ensuite comme $e^{-(t + a^2 t^2)}$. Dans ces conditions, ce sont essentiellement les valeurs de t au voisinage du maximum qui contribuent aux intégrales, tandis que les valeurs voisines de θ/T n'interviennent pratiquement pas. L'introduction dans (39) des développements (40) peut donc se justifier - éventuellement de façon plus rigoureuse - pour $0 < t < \theta/T$.

En reportant (40a) et (40b) dans (39) et en ne retenant que les termes d'ordre le plus bas en champ électrique (autres que le terme d'ordre 1), nous sommes conduits à éliminer les produits du type $V_0^2/s^2(1 - \frac{T}{T_0})$. Finalement :

$$\begin{aligned} \langle J_x(T_0, T) \rangle = & \frac{n m^{1/2} D(p)}{(2\pi)^{3/2} \hbar(kT)^{1/2} B} \left(\frac{kT}{\hbar s} \right)^{p+1} \frac{V_0}{s} \left\{ \int_0^{\theta/T_0} dt t^{p+1} e^{-a^2 t^2} \frac{e^{t/2}}{e^t - 1} K_0 \left(\frac{t}{2} \right) \right. \\ & + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) \int_0^{\theta/T_0} dt t^{p+2} e^{-a^2 t^2} \frac{e^{t/2}}{e^t - 1} \left[K_0 \left(\frac{t}{2} \right) \frac{e^t + 1}{e^t - 1} - K_1 \left(\frac{t}{2} \right) \right] \\ & \left. - \frac{1}{32} \frac{V_0^2}{s^2} \int_0^{\theta/T_0} dt t^{p+2} e^{-a^2 t^2} \frac{e^{t/2}}{e^t - 1} \left[3K_1 \left(\frac{t}{2} \right) - \frac{t}{2} K_0 \left(\frac{t}{2} \right) - \frac{3t}{2} K_2 \left(\frac{t}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, les fonctions à intégrer ne contribuent aux intégrales qu'au voisinage de leur maximum se produisant pour des valeurs $t > 2$. Alors, les fonctions de Bessel varient en première approximation toutes de la même façon :

$$K_n\left(\frac{t}{2}\right) \approx e^{-\frac{t}{2}} \left(\frac{\pi}{t}\right)^{1/2} \quad (42)$$

En utilisant le fait que quand $a^2 \ll 1$, on peut développer $e^{-a^2 t^2}$ en série et ne conserver que les premiers termes, la formule (41) fait intervenir des intégrales du type :

$$J_\nu\left(\frac{\theta}{T_0}\right) = \int_0^{\theta/T_0} dt \frac{t^\nu}{e^t - 1} \quad (43)$$

Finalement, on peut exprimer $\langle J_x(T_0, T) \rangle$ à l'aide de ces $J_\nu\left(\frac{\theta}{T_0}\right)$. La fin des calculs est exposée dans le §5.II.

ANNEXE 7

CALCUL FINAL DE $\langle J_x \rangle$ EN LIMITE QUANTIQUE

CAS DES PHONONS OPTIQUES

Il s'agit d'achever le calcul de $\langle J_x \rangle$ dont l'expression est donnée par (5.43):

$$\begin{aligned} \langle J_x \rangle = & \frac{n m^{1/2} D(o)}{2(2\pi)^{5/2} \hbar(kT)^{1/2} B} \frac{\alpha_o}{\text{sh} \alpha_o} \left(\frac{2m\omega_c}{\hbar} \right)^{1/2} \frac{V_o^2}{V_o^2} \int_0^{\frac{\hbar q_{\max}^2}{2m\omega_c}} \frac{dx}{dx} \int_0^{\frac{\hbar q_{\max}^2}{2m\omega_c} - \frac{\omega_q}{\omega_c} x} dt \frac{t^{1/2}}{x} \frac{e^{-t}}{t + \frac{\omega_q}{\omega_c} x} \\ & \int_{-\frac{V_o}{V_T}}^{\frac{V_o}{V_T}} du' \frac{u'}{\sqrt{1 - \frac{V_o^2}{V_T^2} u'^2}} \left\{ \exp - \left[\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left(x^{1/2} - \frac{1}{x^{1/2}} \right) - \left(\frac{\omega_c}{\omega_q} \right)^{1/2} \left(\frac{t}{x} \right)^{1/2} u' \right]^2 \right. \\ & \left. - e^{\frac{\hbar \omega_q}{kT}} \exp - \left[\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left(x^{1/2} + \frac{1}{x^{1/2}} \right) + \left(\frac{\omega_c}{\omega_q} \right)^{1/2} \left(\frac{t}{x} \right)^{1/2} u' \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

Nous supposons la condition $\frac{V_o}{V_T} \ll 1$ remplie et nous évaluons l'intégrale en u' à l'aide du développement (4.28). Ce travail a été fait, sur une fonction tout-à-fait analogue, au début de l'annexe 6 (cf. (2)). Avec quelques modifications élémentaires, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle J_x \rangle = & \frac{e n m^{1/2} D(o)}{2^{5/2} \pi^{3/2} \hbar(kT)^{3/2} \text{sh} \alpha_o} \frac{E}{B} \int_0^{\frac{\hbar q_{\max}^2}{2m\omega_c}} dx \frac{1}{x} e^{-\frac{\alpha}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)} \int_0^{\frac{\hbar q_{\max}^2}{2m\omega_c} - \frac{\omega_q}{\omega_c} x} dt \frac{t e^{-t}}{t + \frac{\omega_q}{\omega_c} x} \\ & \left\{ \text{ch}(\alpha - \alpha_o) - \frac{1}{x} \text{sh}(\alpha - \alpha_o) - \frac{3}{4} \frac{V_o^2}{V_T^2} \frac{\omega_c}{\omega_q} \frac{t}{x} \left(\text{ch}(\alpha - \alpha_o) - \frac{1}{x} \text{sh}(\alpha - \alpha_o) \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} \frac{V_o^2}{V_T^2} \frac{\hbar \omega_c}{kT} t \left(\text{ch}(\alpha - \alpha_o) - \frac{3}{x} \text{sh}(\alpha - \alpha_o) + \frac{3}{2} \text{ch}(\alpha - \alpha_o) - \frac{1}{x^3} \text{sh}(\alpha - \alpha_o) \right) \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

Cette dernière expression de $\langle J_x \rangle$ fait intervenir des intégrales de la forme :

$$I_q^p = \int_0^{\frac{\hbar q_{\max}^2}{2m}} dx \frac{e^{-\frac{\alpha}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)}}{x^q} \int_0^{\frac{\hbar q_{\max}^2}{2m\omega} - \frac{\omega}{c} x} dt \frac{t^p e^{-t}}{t + \frac{\omega}{c} x} \quad (3)$$

avec : $p = 1$ ou 2 et $q = 1, 2, 3$ ou 4 .

Nous considérons aussi l'intégrale I_1^0 qui intervient dans la détermination ultérieure de la température électronique. Etudions donc ces intégrales en détail, en commençant par le cas intermédiaire où $p = 1$.

A - Etude de I_q^1

En remarquant que $\frac{t}{t + \frac{\omega}{c} x} = 1 - \frac{\frac{\omega}{c} x}{t + \frac{\omega}{c} x}$, l'intégrale I_q^1 se scinde en deux. Après quelques transformations élémentaires, on obtient :

$$I_q^1 = \int_0^{\frac{\hbar q_{\max}^2}{2m}} dx \frac{e^{-\frac{\alpha}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)}}{x^q} \left[\left(1 - e^{-\frac{\omega}{c} x} \right) e^{-\frac{\hbar q_{\max}^2}{2m\omega}} - e^{-\frac{\omega}{c} x} \frac{\omega}{c} x \left(E_1 \left(\frac{\omega}{c} x \right) - E_1 \left(\frac{\hbar q_{\max}^2}{2m\omega} \right) \right) \right] \quad (4)$$

La fonction E_1 est l'exponentielle intégrale

$$E_1(y) = \int_y^\infty dt \frac{e^{-t}}{t} \quad (5)$$

qui possède les trois propriétés suivantes :

$$1^\circ E_1(y) = -\text{Log } Cy - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{y^n}{n!} \quad \text{avec } \text{Log } C = \text{constante d'Euler} \quad (6)$$

$$2^\circ E_1(y) \rightarrow \frac{e^{-y}}{y} \left(1 - \frac{1}{y} + \dots \right) \quad \text{quand } y \rightarrow \infty \quad (7)$$

$$3^\circ E_1(y) \rightarrow -\text{Log } Cy \quad \text{quand } y \rightarrow 0 \quad (8)$$

On peut obtenir une expression algébrique simple de I_q^1 uniquement dans deux cas limites, selon les valeurs du paramètre $\frac{\omega_q}{\omega_c}$.

a) Etude du premier cas : $\frac{\omega_q}{\omega_c} \gg 1$

Cette inégalité s'écrit aussi sous la forme :

$$\frac{\hbar\omega_q}{kT} \gg 1 \quad (9)$$

Comme $\frac{kT}{\hbar\omega_c} \ll 1$ quand la limite quantique est atteinte, il faut donc que :

$$\frac{\hbar\omega_q}{kT} = 2\alpha \gg 1 \quad (10)$$

Par conséquent, ce premier cas ne peut se rencontrer qu'aux basses températures et quand les valeurs de B sont juste suffisantes pour atteindre la limite quantique.

Revenons à I_q^1 : la fonction $\frac{e^{-\alpha/2(x + 1/x)}}{x^q}$ passe par un maximum au voisinage de $x = 1$ d'autant plus prononcé que α est grand devant 1. De plus, au-delà du maximum, les fonctions à intégrer intervenant dans (4) décroissent très rapidement avec x . La borne supérieure $\hbar q_{\max}^2 / 2m\omega_q$ prend des valeurs toujours très élevées ($\approx 10^3$) ; par conséquent, elle peut être remplacée par 1^∞ sans commettre d'erreur appréciable.

De plus, dans la région voisine de $x = 1$, où la fonction à intégrer contribue à l'intégrale, $\omega_q / \omega_c x \gg 1$. On peut donc remplacer $E_1(\omega_q / \omega_c x)$ par son développement asymptotique (7) ; on fait de même pour $E_1(\hbar q_{\max}^2 / 2m\omega_c)$ puisque :

$$\frac{\hbar q_{\max}^2}{2m\omega_c} = \frac{\hbar q_{\max}^2}{2m\omega_q} \frac{\omega_q}{\omega_c} \gg 1 \quad (11)$$

Finalement :

$$I_q^1 \approx \int_0^\infty dx \frac{e^{-\frac{\alpha}{2}(x + \frac{1}{x})}}{x^q} \left(\frac{\omega_c}{\omega_q} \frac{1}{x} - e^{\frac{\omega_q}{\omega_c}} e^{-\frac{\hbar q_{\max}^2}{2m\omega_c}} \left(1 + \frac{2m\omega_q}{\hbar q_{\max}^2} x \right) \right) \quad (12)$$

et en introduisant le coefficient b défini par la formule (6) de l'annexe 6 :

$$I_q^1 \approx \frac{\omega_q}{\omega_c} 2K_q(\alpha) - 2e^{-\frac{\hbar q_{\max}^2}{2m\omega_c}} b^{q-1} \left[K_{q-1}(\alpha b) - \frac{2m\omega_q}{\hbar q_{\max}^2} \frac{1}{b} K_{q-2}(\alpha b) \right] \quad (13)$$

Le terme contenant $e^{-\frac{\hbar q_{\max}^2}{2m\omega_c}}$ est totalement négligeable devant le premier, si bien que :

$$I_q^1 \approx 2 \frac{\omega_q}{\omega_c} K_q(\alpha) \quad (14)$$

b) Etude du second cas : $\frac{\omega_q}{\omega_c} \ll 1$

L'inégalité ci-dessus est équivalente à :

$$\frac{\hbar \omega_q}{kT} \frac{kT}{\hbar \omega_c} \ll 1 \quad (15)$$

Compte-tenu du fait que l'énergie des phonons optiques est relativement élevée, le rapport $\hbar \omega_q / kT$ est rarement petit devant 1. En outre, la condition $kT / \hbar \omega_c \ll 1$ étant déjà supposée vérifiée (limite quantique), il suffit que $2\alpha = \hbar \omega_q / kT$ reste de l'ordre de l'unité. La condition $\omega_q / \omega_c \ll 1$ est donc réalisée aux hautes températures et aux inductions magnétiques élevées.

Du fait que α reste de l'ordre de l'unité, la borne supérieure $\hbar q_{\max}^2 / 2m\omega_q$ peut encore être remplacée par 1^∞ . De plus, en utilisant le développement (6) de $E_1(\omega_q / \omega_c x)$, nous obtenons :

$$I_q^1 \approx 2K_{q-1}(\alpha) - 2e^{-\frac{\hbar q_{\max}^2}{2m\omega_c}} b^{q-1} K_{q-1}(\alpha) + 2 \frac{\omega_q}{\omega_c} E_1 \left[\frac{\hbar q_{\max}^2}{2m\omega_c} \right] b^{q-2} K_{q-2}(b\alpha) \\ + \frac{\omega_q}{\omega_c} b^{q-2} \left[2 \text{Log} \frac{C\omega_q}{b\omega_c} K_{q-2}(\alpha) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n n!} \left(\frac{\omega_q}{b\omega_c} \right)^n K_{q-2-n}(b\alpha) \right. \\ \left. + \int_0^\infty dx' \frac{e^{-\alpha b(x' + \frac{1}{x'})}}{x' q - 1} \text{Log } x' \right] \quad (16)$$

Analysons la série et l'intégrale qui interviennent dans (16).

- Tout d'abord la série doit converger ; elle est alternée et l'on vérifie que ses termes vont en décroissant à partir du premier. Sa somme est donc inférieure à son premier terme : $-\frac{\omega_q}{b\omega_c} K_{q-3}(b\alpha)$.

- Ensuite, l'intégrale :

$$J_q(\alpha) = \int_0^\infty dx' \frac{e^{-\frac{\alpha b}{2} (x' + \frac{1}{x'})}}{x'^{q-1}} \text{Log } x' \quad (17)$$

peut se calculer pour les quatre valeurs de q qui interviennent dans I_p^q ; nous obtenons :

$$J_1 = -J_3 = \frac{2}{\alpha b} K_0(\alpha b), \quad J_2 = 0, \quad J_4 = -\frac{4}{\alpha b} \left(\frac{1}{\alpha b} K_0(\alpha b) + K_1(\alpha b) \right) \quad (18)$$

En tenant compte de ces deux résultats et de la condition $\frac{\omega_q}{\omega_c} \ll 1$, les termes importants de I_q^1 se réduisent à :

$$I_q^1 \approx 2 K_{q-1}(\alpha) \quad (19)$$

B - Etude de I_1^0 et I_q^2

En appliquant les mêmes raisonnements à I_1^0 et I_q^2 , nous obtenons :

$$I_1^0 \approx \begin{cases} 2 \frac{\omega_c}{\omega_q} K_1(\alpha) & \text{quand } \frac{\omega_q}{\omega_c} \gg 1 \\ -2 \text{Log } \frac{C\omega_q}{b\omega_c} K_0(\alpha b) & \text{quand } \frac{\omega_q}{\omega_c} \ll 1 \end{cases} \quad (20a) \quad (20b)$$

$$\text{et } I_q^2 \approx \begin{cases} 4 \frac{\omega_c}{\omega_q} K_q(\alpha) & \text{quand } \frac{\omega_q}{\omega_c} \gg 1 \\ 2 K_{q-1}(\alpha) & \text{quand } \frac{\omega_q}{\omega_c} \ll 1 \end{cases} \quad (21a) \quad (21b)$$

C - Application au calcul de $\langle J_x \rangle$

Exprimée à l'aide des intégrales I_q^P , la formule (2) de $\langle J_x \rangle$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle J_x \rangle = & \frac{e n m^{1/2} D(0)}{2^{5/2} \pi^{3/2} \hbar (kT)^{3/2} \text{sh} \alpha_0} \frac{E}{B} \{ I_1^1 \text{ch}(\alpha - \alpha_0) - I_2^1 \text{sh}(\alpha - \alpha_0) \\ & - \frac{3}{4} \frac{V_o^2}{V_T^2} \frac{\omega_c}{\omega_q} \left(I_2^2 \text{ch}(\alpha - \alpha_0) - I_3^2 \text{sh}(\alpha - \alpha_0) \right) \\ & + \frac{1}{8} \frac{V_o^2}{V_T^2} \frac{\hbar \omega_c}{kT} \left(I_1^2 \text{ch}(\alpha - \alpha_0) - 3I_2^2 \text{sh}(\alpha - \alpha_0) + 3I_3^2 \text{ch}(\alpha - \alpha_0) - I_4^2 \text{sh}(\alpha - \alpha_0) \right) \end{aligned} \quad (22)$$

Nous devons alors tenir compte des formules (14) à (20) pour obtenir $\langle J_x \rangle$ dans les deux cas limites considérés. Le résultat de cette transformation est reporté dans le texte.

REFERENCES

- (1) R. Kubo - J. Phys. Soc. Japan 12 n°6 570 (1957).
R. Kubo, S.J. Miyake, N. Hashitsume - Solid State Physics Vol 17
Acad. Press.
- (2) R.F. Kazarinov, V.G. Skobov - Sov. Phys. J.E.T.P. 15 n°4 726 (1962).
V.P. Kalashnikov, R.V. Pomorstev - Fiz. Metal. Metalloved 17 n°3 343 (1963).
H.F. Budd - Phys. Rev. 131 n°4 1520 (1963).
- (3) D. Calecki - J. Phys. Chem. Solids 28 1409 (1967).
- (4) E.N. Adams, T.D. Holstein - J. Phys. Chem. Solids 10 254 (1959).
P.N. Argyres - Phys. Rev. 117 n°2 315 (1960).
- (5) C. Bloch, C. de Dominicis - Nuclear Phys. 7 459 (1958).
- (6) A.I. Ansel'm, B.M. Askerov - Sov. Phys. Sol. State 2 n°9 2060 (1961).
- (7) S. Titeica - Ann. Physik 22 129 (1935).
- (8) J.M. Ziman - "Electrons and Phonons" p.205 Oxford Univ. Press (1960).
- (9) H.J.G. Meijer, D. Polder - Physica 19 255 (1953).
- (10) A.C. Beer "Galvanomagnetic effects in semiconductors" Acad. Press (1963).
- (11) W.A. Harrison - Phys. Rev. 101 n°2 903 (1956).
- (12) M.A. Krivoglaz, S.I. Pekar - Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Fiz. 21 3 (1957).
- (13) V.L. Gurevich, Yu. A. Firsov - Sov. Phys. J.E.T.P. 13 n°1 137 (1961).
- (14) G.N. Watson - "A treatise on the theory of Bessel functions"
Cambridge Univ. Press (1966).
- (15) Yu.A. Firsov, V.L. Gurevich, R.V. Parfeniev, S.S. Shalyt -
Phys. Rev. Letters 12 660 (1964).
- (16) R.J. Sladek - J. Phys. Chem. Solids 16 1 (1960).
- (17) H.R. Huff, S. Kawaji, H.C. Gatos - Phys. Stat. Sol. 30 613 (1968).
R.K. Willardson, A.C. Beer "Semiconductors and Semimetals" Vol 1
Acad. Press 1966.
- (18) M. Haas, B.W. Henvis - J. Phys. Chem. Solids 23 1099 (1962).

FACULTÉ DES SCIENCES
DE PARIS

9, QUAI SAINT BERNARD - PARIS V^e

SERVICE DE LA SCOLARITÉ

Bureau des Enseignements du 3^e Cycle

TÉLÉPHONE : 336-25-25 - P

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT : D'ÉTAT

THESE DE : ES SCIENCES PHYSIQUES

Nom : CALECKI

Prénoms : Daniel

Né (e) le 14 Décembre 1936 à PARIS XIV^eme Dép^t Seine

SUJETS

1^{ère} THESE : " Contribution à l'étude des phénomènes galvanomagnétiques
non linéaires."

2^e THESE (Propositions faites par la Faculté) :

Vu et approuvé

Paris, le 27 Février 1970

Le Doyen de la Faculté
des Sciences de Paris

Vu et permis d'imprimer

Paris, le

Le Recteur de l'Académie
de Paris



[Signature]

